

## Regolarità $C^{1,\alpha}$ delle soluzioni

### ECCESO $L^2$ PER UNA FUNZIONE ARMONICA

**Lemma 1.** *Esistono costanti dimensionali  $\varepsilon > 0$ ,  $\kappa > 0$  e  $C > 0$  tali che per ogni funzione armonica  $u \in H^1(B_R)$  e per ogni costante  $A \in \mathbb{R}$ , esiste una costante  $a \in \mathbb{R}$  tale che*

$$\left( \frac{1}{|B_{\kappa R}|} \int_{B_{\kappa R}} |u - a|^2 dx \right)^{1/2} \leq (1 - \varepsilon) \left( \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} |u - A|^2 dx \right)^{1/2} \quad e \quad |A - a| \leq C \left( \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} |u - A|^2 dx \right)^{1/2}.$$

*Dimostrazione.* Possiamo supporre che  $A = 0$ . Osserviamo che

$$\frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} |u| dx \leq \left( \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} |u|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Di conseguenza, fissato  $\tau \in (0, 1)$ , abbiamo che

$$\operatorname{osc}_{B_{\tau R}} u = \max_{B_{\tau R}} u - \min_{B_{\tau R}} u \leq \frac{2}{(1 - \tau)^d} \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} |u| dx.$$

D'altra parte, per la disuguaglianza di Harnack,

$$\operatorname{osc}_{B_{R\tau/2}} u \leq (1 - c_{\mathcal{H}}) \operatorname{osc}_{B_{R\tau}} u,$$

dove  $c_{\mathcal{H}} \in (0, 1)$  è una costante dimensionale. Mettendo insieme le due stime e ponendo  $\kappa := \tau/2$ , otteniamo

$$\operatorname{osc}_{B_{\kappa R}} u \leq \frac{2(1 - c_{\mathcal{H}})}{(1 - \tau)^d} \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} |u| dx.$$

Scegliendo

$$a := \frac{1}{2} \left( \max_{B_{\kappa R}} u + \min_{B_{\kappa R}} u \right),$$

otteniamo che

$$2 \left( \frac{1}{|B_{\kappa R}|} \int_{B_{\kappa R}} |u - a|^2 dx \right)^{1/2} \leq \operatorname{osc}_{B_{\kappa R}} u.$$

In conclusione,

$$\left( \frac{1}{|B_{\kappa R}|} \int_{B_{\kappa R}} |u - a|^2 dx \right)^{1/2} \leq \frac{1 - c_{\mathcal{H}}}{(1 - 2\kappa)^d} \left( \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} |u|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Quindi scegliendo  $\kappa$  abbastanza piccolo possiamo scegliere  $\varepsilon$  come

$$1 - \varepsilon := \frac{1 - c_{\mathcal{H}}}{(1 - 2\kappa)^d}.$$

Infine, siccome

$$|a| \leq \frac{1}{2} \left( \left| \max_{B_{\kappa R}} u \right| + \left| \min_{B_{\kappa R}} u \right| \right) \leq \frac{1}{(1 - \kappa)^d} \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} |u| dx,$$

otteniamo anche la seconda stima della tesi con costante  $C = (1 - \kappa)^{-d}$ . □

**Lemma 2.** *Esistono costanti dimensionali  $\varepsilon > 0$ ,  $\kappa > 0$  e  $C > 0$  tali che per ogni funzione armonica  $h \in H^1(B_R)$  e per ogni funzioni lineari  $L(x) = A \cdot x$ , esiste una funzione lineare  $\ell(x) = a \cdot x$  tale che*

$$\left( \frac{1}{|B_{\kappa R}|} \int_{B_{\kappa R}} |\nabla u - a|^2 dx \right)^{1/2} \leq (1 - \varepsilon) \left( \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} |\nabla u - A|^2 dx \right)^{1/2} \quad e \quad |A - a| \leq C \left( \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} |\nabla u - A|^2 dx \right)^{1/2}.$$

*Dimostrazione.* Segue dal lemma precedente e dal fatto che le derivate parziali di  $h$  sono funzioni armoniche. □

---

REGOLARITÀ HÖLDER DEI GRADIENTI

**Proposizione 3.** Siano  $B_\rho \subset \mathbb{R}^d$  e  $v \in H^1(B_\rho)$  una funzione tale che:

- (i)  $v$  è Lipschitz in  $B_\rho$  e  $v(0) = 0$ ;
- (ii) per ogni successione

$$v_{r_n}(x) = \frac{1}{r_n} v(r_n x) \quad \text{con} \quad r_n \rightarrow 0,$$

esistono una funzione lineare  $L : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  ed una sottosuccessione  $v_{r_n}$  tali che

$$v_{r_n} \rightarrow L \quad \text{uniformemente in } B_R \quad \text{e} \quad \text{fortemente in } H^1(B_R),$$

per ogni palla  $B_R \subset \mathbb{R}^d$ .

- (iii)  $v$  soddisfa la seguente condizione di quasi-minimalità:

$$\int_{B_r} |\nabla(v - h)|^2 dx \leq C r^\alpha \quad \text{per ogni } r < \rho,$$

dove  $C > 0$  è una costante fissata, dove  $h$  è l'estensione armonica di  $v$  in  $B_r$ :

$$\Delta h = 0 \quad \text{in } B_r, \quad h - v \in H_0^1(B_r).$$

Allora, esiste un'unica funzione lineare  $L : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$\lim_{r \rightarrow 0} \|v_r - L\|_{L^\infty(B_1)} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow 0} \|v_r - L\|_{H^1(B_1)} = 0.$$

In particolare,  $v$  è differenziabile in zero.

**Osservazione 4.** Osserviamo che (come abbiamo dimostrato in precedenza) l'ipotesi (ii) segue da (i) e (iii).

**Dimostrazione di Proposizione 3.** Sia  $R > 0$  un raggio fissato. Definiamo

$$r_n = \kappa^n R,$$

dove  $\kappa$  è la costante dimensionale dal lemma precedente. Inoltre, sia  $h$  l'estensione armonica di  $v$  in  $B_{r_n}$ :

$$\Delta h = 0 \quad \text{in } B_{r_n}, \quad h - v \in H_0^1(B_{r_n}).$$

Allora, per ogni funzione lineare  $L_{n+1} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  abbiamo che

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{r_{n+1}^d} \int_{B_{r_{n+1}}} |\nabla(v - L_{n+1})|^2 dx \right)^{1/2} &\leq \left( \frac{1}{r_{n+1}^d} \int_{B_{r_{n+1}}} |\nabla(v - h)|^2 dx \right)^{1/2} + \left( \frac{1}{r_{n+1}^d} \int_{B_{r_{n+1}}} |\nabla(h - L_{n+1})|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{r_n^{d/2}}{r_{n+1}^{d/2}} \left( \frac{1}{r_n^d} \int_{B_{r_n}} |\nabla(v - h)|^2 dx \right)^{1/2} + \left( \frac{1}{r_{n+1}^d} \int_{B_{r_{n+1}}} |\nabla(h - L_{n+1})|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq C \frac{r_n^{d/2}}{r_{n+1}^{d/2}} r_n^{\alpha/2} + \left( \frac{1}{r_{n+1}^d} \int_{B_{r_{n+1}}} |\nabla(h - L_{n+1})|^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Ora, prendiamo  $L_{n+1} := \ell$  del lemma precedente, dove  $L := L_n$ . Quindi

$$\left( \frac{1}{r_{n+1}^d} \int_{B_{r_{n+1}}} |\nabla(v - L_{n+1})|^2 dx \right)^{1/2} \leq C \kappa^{d/2} R^{\alpha/2} (\kappa^{\alpha/2})^n + (1 - \varepsilon) \left( \frac{1}{r_n^d} \int_{B_{r_n}} |\nabla(h - L_n)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Definendo

$$M_n := \left( \frac{1}{r_n^d} \int_{B_{r_n}} |\nabla(v - L_n)|^2 dx \right)^{1/2} = \left( \int_{B_1} |\nabla(v_{r_n} - L_n)|^2 dx \right)^{1/2},$$

otteniamo che

$$M_{n+1} \leq C \kappa^{d/2} R^{\alpha/2} (\kappa^{\alpha/2})^n + (1 - \varepsilon) M_n,$$

con

$$|L_{n+1} - L_n| \leq C_d M_n.$$

Sia

$$a_n := M_n + B X^n \quad \text{dove} \quad X := \kappa^{\alpha/2},$$

e dove la costante  $B$  è da scegliere.

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= M_{n+1} + BX^{n+1} \\
&\leq C\kappa^{d/2}R^{\alpha/2}X^n + (1-\varepsilon)M_n + BX^{n+1} \\
&\leq (1-\varepsilon)a_n + C\kappa^{d/2}R^{\alpha/2}X^n - (1-\varepsilon)BX^n + BX^{n+1} \\
&\leq (1-\varepsilon)a_n + X^n \left( C\kappa^{d/2}R^{\alpha/2} - (1-\varepsilon)B + BX \right) \\
&= (1-\varepsilon)a_n + X^n \left( C\kappa^{d/2}R^{\alpha/2} - (1-\varepsilon-X)B \right) \\
&= (1-\varepsilon)a_n,
\end{aligned}$$

dove abbiamo scelto

$$B := \frac{C\kappa^{d/2}R^{\alpha/2}}{1-\varepsilon-\kappa^{\alpha/2}}.$$

In conclusione,

$$M_n \leq a_n \leq (1-\varepsilon)^n \left( M_0 + \frac{C\kappa^{d/2}R^{\alpha/2}}{1-\varepsilon-\kappa^{\alpha/2}} \right).$$

Ora, siccome

$$|L_{n+1} - L_n| \leq C_d M_n \leq C_d (1-\varepsilon)^n \left( M_0 + \frac{C\kappa^{d/2}R^{\alpha/2}}{1-\varepsilon-\kappa^{\alpha/2}} \right).$$

Quindi  $L_n$  converge uniformemente ad  $L_\infty$  e

$$|L_\infty - L_n| \leq C_d M_n \leq \frac{C_d}{\varepsilon} (1-\varepsilon)^n \left( M_0 + \frac{C\kappa^{d/2}R^{\alpha/2}}{1-\varepsilon-\kappa^{\alpha/2}} \right).$$

Dunque,

$$\left( \int_{B_1} |\nabla(v_{r_n} - L_\infty)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \left( 1 + \frac{C_d}{\varepsilon} \right) (1-\varepsilon)^n \left( M_0 + \frac{C\kappa^{d/2}R^{\alpha/2}}{1-\varepsilon-\kappa^{\alpha/2}} \right).$$

□