REGOLARITÀ $C^{1,\alpha}$ DELLE SOLUZIONI.
UNICITÀ DEL BLOW-UP E DIFFERENZIABILITÀ DELLE SOLUZIONI

Proposizione 1. *Siano $B_\rho \subset \mathbb{R}^d$ e $v \in H^1(B_\rho)$ una funzione tale che:*

- (i) *v è Lipschitz in B_ρ e $v(0) = 0$;*
- (ii) *per ogni successione*

$$v_{r_n}(x) = \frac{1}{r_n} v(r_n v) \quad \text{con} \quad r_n \rightarrow 0,$$

esistono una funzione lineare $L : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ed una sottosuccessione v_{r_n} tali che

$$v_{r_n} \rightarrow L \quad \text{uniformemente in } B_R \quad \text{e} \quad \text{fortemente in } H^1(B_R),$$

per ogni palla $B_R \subset \mathbb{R}^d$.

- (iii) *v soddisfa la seguente condizione di quasi-minimalità:*

$$\int_{B_r} |\nabla(v-h)|^2 dx \leq Cr^\alpha \quad \text{per ogni } r < \rho,$$

dove $C > 0$ è una costante fissata, dove h è l'estensione armonica di v in B_r :

$$\Delta h = 0 \quad \text{in } B_r, \quad h - v \in H_0^1(B_r).$$

Allora, esiste un'unica funzione lineare $L : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{r \rightarrow 0} \|v_r - L\|_{L^\infty(B_1)} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow 0} \|v_r - L\|_{H^1(B_1)}.$$

In particolare, v è differenziabile in zero.

Osservazione 2. *Osserviamo che (come abbiamo dimostrato in precedenza) l'ipotesi (ii) segue da (i) e (iii).*

Dimostrazione di **Proposizione 1.** Siano r ed R tali che

$$0 < r < R < \rho.$$

Inoltre, sia h l'estensione armonica di v in B_R :

$$\Delta h = 0 \quad \text{in } B_R, \quad h - v \in H_0^1(B_R).$$

Allora, per ogni funzione lineare $L : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ abbiamo che

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{r^d} \int_{B_r} |\nabla(v-L)|^2 dx \right)^{1/2} &\leq \left(\frac{1}{r^d} \int_{B_r} |\nabla(v-h)|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\frac{1}{r^d} \int_{B_r} |\nabla(h-L)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{R^{d/2}}{r^{d/2}} \left(\frac{1}{R^d} \int_{B_R} |\nabla(v-h)|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\frac{1}{r^d} \int_{B_r} |\nabla(h-L)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq C \frac{R^{d/2}}{r^{d/2}} R^{\alpha/2} + \left(\frac{1}{r^d} \int_{B_r} |\nabla(h-L)|^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Ora, siccome $h - L$ è l'estensione armonica di $v - L$ in B_R abbiamo che

$$\frac{1}{r^d} \int_{B_r} |\nabla(h-L)|^2 dx \leq \frac{1}{R^d} \int_{B_R} |\nabla(h-L)|^2 dx \leq \frac{1}{R^d} \int_{B_R} |\nabla(v-L)|^2 dx.$$

Di conseguenza,

$$\left(\frac{1}{r^d} \int_{B_r} |\nabla(v-L)|^2 dx \right)^{1/2} \leq C \frac{R^{d/2}}{r^{d/2}} R^{\alpha/2} + \left(\frac{1}{R^d} \int_{B_R} |\nabla(v-L)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Scegliendo

$$r_n := R2^{-n},$$

abbiamo che

$$\left(\frac{1}{r_{n+1}^d} \int_{B_{r_{n+1}}} |\nabla(v-L)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \frac{C2^{d/2}R^{\alpha/2}}{(2^{\alpha/2})^n} + \left(\frac{1}{r_n^d} \int_{B_{r_n}} |\nabla(v-L)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Sommando su $n = 0, \dots, N - 1$, otteniamo

$$\left(\frac{1}{r^d} \int_{B_{r_N}} |\nabla(v - L)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \frac{C2^{d/2}R^{\alpha/2}}{1 - 2^{-\alpha/2}} + \left(\frac{1}{R^d} \int_{B_R} |\nabla(v - L)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Sia ora $r < R$. Possiamo trovare un intero $N > 0$ tale per cui

$$R2^{-(N+1)} \leq r \leq R2^{-N}.$$

Quindi,

$$\left(\frac{1}{r^d} \int_{B_r} |\nabla(v - L)|^2 dx \right)^{1/2} \leq 2^{d/2} \left(\frac{C2^{d/2}R^{\alpha/2}}{1 - 2^{-\alpha/2}} + \left(\frac{1}{R^d} \int_{B_R} |\nabla(v - L)|^2 dx \right)^{1/2} \right),$$

che possiamo scrivere anche come

$$\left(\int_{B_1} |\nabla(v_r - L)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \frac{C2^d R^{\alpha/2}}{1 - 2^{-\alpha/2}} + 2^{d/2} \left(\int_{B_1} |\nabla(v_R - L)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

In particolare, se

$$b = \lim_{k \rightarrow \infty} v_{r_k}$$

è un qualsiasi blow-up di v , allora

$$\left(\int_{B_1} |\nabla(b - L)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \frac{C2^d R^{\alpha/2}}{1 - 2^{-\alpha/2}} + 2^{d/2} \left(\int_{B_1} |\nabla(v_R - L)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Se ora scegliamo L come un blow-up di v , allora passando al limite, otteniamo che

$$\left(\int_{B_1} |\nabla(b - L)|^2 dx \right)^{1/2} = 0,$$

ovvero il blow-up è unico. □

Corollario 3 (Regolarità C^1 all'interno). *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Sia $u \in H^1(\Omega)$ una soluzione di*

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f + \operatorname{div} F \quad \text{in } \Omega,$$

dove:

- A è una matrice simmetrica, uniformemente ellittica e limitata su Ω , con coefficienti Hölder.
- $f \in L^p(\Omega)$ per un qualche $p > d$.
- $F \in C^{0,\beta}(\Omega; \mathbb{R}^d)$, per un qualche $\beta > 0$.

Allora, $u \in C^1(\Omega)$.

Corollario 4 (Regolarità C^1 fino al bordo). *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^d$ con bordo di classe $C^{1,\alpha}$ per un qualche $\alpha > 0$. Sia u la soluzione di*

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f + \operatorname{div} F \quad \text{in } \Omega, \quad u = \phi \quad \text{su } \partial\Omega,$$

dove:

- A è una matrice simmetrica, uniformemente ellittica e limitata su $\overline{\Omega}$, con coefficienti Hölder su $\overline{\Omega}$.
- $f \in L^p(\Omega)$ per un qualche $p > d$.
- $F \in C^{0,\beta}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^d)$, per un qualche $\beta > 0$.
- $\phi \in C^{1,\gamma}(\partial\Omega; \mathbb{R}^d)$, per un qualche $\gamma > 0$.

Allora, $u \in C^1(\overline{\Omega})$.