

REGOLARITÀ $C^{1,\alpha}$ DELLE SOLUZIONI. SUCCESSIONI E LIMITI DI BLOW-UP

1. INTRODUZIONE

Setting. Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$, $f \in L^1(\Omega)$ e $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ un campo vettoriale continuo su Ω , o più in generale in $L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$. Ricordiamo che una funzione $u \in H^1(\Omega)$ è una soluzione debole del problema

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f + \operatorname{div} F \quad \text{in } \Omega,$$

se

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot A(x) \nabla u \, dx = \int_{\Omega} f(x) v \, dx - \int_{\Omega} F(x) \cdot \nabla v \, dx \quad \text{per ogni } v \in H_0^1(\Omega),$$

dove la matrice

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1d}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1}(x) & \dots & a_{dd}(x) \end{pmatrix}$$

è una matrice a coefficienti variabili con le seguenti proprietà:

- i coefficienti di A sono funzioni Hölder continue:

$$a_{ij} \in C^{0,\alpha}(\Omega) \quad \text{per ogni coppia di indici } 1 \leq i, j \leq d.$$

- A è simmetrica:

$$a_{ij} \equiv a_{ji} : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{per } 1 \leq i, j \leq d,$$

- A è uniformemente ellittica e uniformemente limitata su Ω , ovvero esistono costanti $0 < c \leq C$ tali che

$$c \operatorname{Id} \leq A(x) \leq C \operatorname{Id} \quad \text{per ogni } x \in \Omega.$$

Teorema 1 ($C^{1,\alpha}$ Schauder all'interno). *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Sia $u \in H^1(\Omega)$ una soluzione di*

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f + \operatorname{div} F \quad \text{in } \Omega,$$

dove:

- A è una matrice simmetrica, uniformemente ellittica e uniformemente limitata su Ω , con coefficienti Hölder.
- $f \in L^p(\Omega)$ per un qualche $p > d$.
- $F \in C^{0,\beta}(\Omega; \mathbb{R}^d)$, per un qualche $\beta > 0$.

Allora, esiste $\alpha > 0$ tale che $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$.

Osservazione 2. Il risultato del Teorema 1 è classico ed è noto come stima $C^{1,\alpha}$ di Schauder (o anche stima debole di Schauder). Dimostrazioni alternative si possono trovare in numerosi testi, per esempio:

[J] J. Jost. *Partial differential equations*. Springer-Verlag New York (2002).

2. RISULTATI PRELIMINARI

Continuità Lipschitz. Sappiamo già che la soluzione u è Lipschitz continua in Ω .

Cambio delle variabili. Per ogni $x_0 \in \Omega$, esiste una matrice $d \times d$ simmetrica $B \in S_d(\mathbb{R})$ che dipende da x_0 (scriveremo anche B_{x_0} al posto di B) ed è tale che

$$B_{x_0} A_{x_0} B_{x_0} = \operatorname{Id}.$$

La funzione

$$v(y) = u(x_0 + B_{x_0}^{-1}y)$$

è soluzione di

$$-\operatorname{div}(\tilde{A} \nabla v) = g + \operatorname{div} G \quad \text{in } B_{x_0}(-x_0 + \Omega),$$

dove $\tilde{A}$, g e G hanno le proprietà seguenti:

- $\tilde{A}$ è una matrice simmetrica, uniformemente ellittica, a coefficienti variabili e con coefficienti in $C^{1,\alpha}$.

$$\tilde{A}(0) = \operatorname{Id} \quad \text{e} \quad \tilde{A}(x) = B_{x_0} A(x_0 + B_{x_0}^{-1}x) B_{x_0} \quad \text{per ogni } x \in B(\Omega).$$

- g è una funzione in $L^p(B(-x_0 + \Omega))$

$$g(y) = f(x_0 + B_{x_0}^{-1}y).$$

- Il campo G è $C^{0,\beta}$ su $B(-x_0 + \Omega)$ ed è definito come

$$F(x) = B_{x_0}[G(B_{x_0}[x - x_0])].$$

Quasi-minimalità. Dato un insieme aperto

$$\omega \subset \subset \Omega$$

esiste un raggio universale $\rho > 0$ tale che per ogni $x_0 \in \omega$ ed ogni $R \in (0, \rho)$ si ha che

$$\int_{B_R(x_0)} |\nabla(v - h)|^2 dx \leq 4C_A R^\alpha \int_{B_R(x_0)} |\nabla v|^2 dx + 4\left(C_d \|f\|_{L^p(\Omega)} R^{1-d/p} + C_F R^\beta\right),$$

dove h è la funzione armonica

$$\Delta h = 0 \quad \text{in } B_R(x_0), \quad h = v \quad \text{su } \partial B_R(x_0).$$

Possiamo assumere che esistono due costanti

$$C > 0 \quad \text{e} \quad \alpha \in (0, 1)$$

che dipendono da Ω e ρ e sono tali che

$$\int_{B_R(x_0)} |\nabla(v - h)|^2 dx \leq C R^\alpha.$$

3. DIFFERENZIABILITÀ DI u

Mostreremo che u è differenziabile nel punto $x_0 = 0$.

Possiamo supporre che $u(x_0) = 0$.

Osserviamo che basta mostrare la differenziabilità di v nel punto $y_0 = 0$.

3.1. Blow-up e differenziabilità. Per ogni $r > 0$ consideriamo la funzione

$$v_r(x) := \frac{1}{r} v(xr)$$

e osserviamo che v_r è definita sulla palla $B_{\rho/r}$. Di conseguenza, fissato un raggio $R > 0$ e scegliendo r abbastanza piccolo, in modo tale che $R < \frac{\rho}{r}$, la funzione v_r è definita su B_R . Inoltre, abbiamo che

$$v_r(0) = 0 \quad \text{e} \quad |\nabla v_r| \leq L \quad \text{in } B_R,$$

dove L è la costante Lipschitz di v . Di conseguenza, ogni successione $r_n \rightarrow 0$ ammette una sottosuccessione $(r_n)_n$ tale che

$$v_{r_n} : B_R \rightarrow \mathbb{R}$$

converge uniformemente ad una qualche funzione

$$v_0 : B_R \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che

$$v_0(0) = 0 \quad \text{e} \quad |\nabla v_0| \leq L \quad \text{in } B_R.$$

Per un argomento di successione diagonale, abbiamo che esistono una sottosuccessione di r_n ed una funzione

$$v_0 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che

$$v_0(0) = 0 \quad \text{e} \quad |\nabla v_0| \leq L \quad \text{in } \mathbb{R}^d,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_{r_n} - v_0\|_{L^\infty(B_R)} = 0 \quad \text{per ogni } R > 0.$$

Definizione 3 (Blow-up). *La funzione v_0 è detta blow-up di v in 0. (Osserviamo che v_0 dipende dalla successione v_{r_n} . Infatti, a successioni diverse potrebbero corrispondere blow-up diversi.)*

3.2. Quasi-minimalità di v_r . Fissiamo un raggio $R > 0$.

Osserviamo che per $r > 0$ abbastanza piccolo, la funzione riscalata $v_r(x) = \frac{1}{r}v(rx)$ è definita su B_R :

$$v_r \in H^1(B_R).$$

Sia $h_r \in H^1(B_R)$ la funzione armonica in B_R con dato al bordo u_r , ovvero

$$\Delta h_r = 0 \quad \text{in } B_R, \quad h_r - v_r \in H_0^1(B_R).$$

Allora, è immediato verificare che

$$\int_{B_R} |\nabla(v_r - h_r)|^2 dx = \int_{B_{rR}} |\nabla(v - h)|^2 dx,$$

dove $h \in H^1(B_{rR})$ la funzione armonica in B_{rR} con dato al bordo v :

$$\Delta h = 0 \quad \text{in } B_{rR}, \quad h - v \in H_0^1(B_{rR}).$$

Ora, usando la quasi-minimalità di v in B_{rR} si ha

$$\int_{B_R} |\nabla(v_r - h_r)|^2 dx = \int_{B_{rR}} |\nabla(v - h)|^2 dx \leq Cr^\alpha R^\alpha.$$

In particolare, siccome

$$\int_{B_R} |\nabla(v_r - h_r)|^2 dx = \int_{B_R} |\nabla v_r|^2 dx - \int_{B_R} |\nabla h_r|^2 dx,$$

abbiamo che

$$\int_{B_R} |\nabla v_r|^2 dx \leq \int_{B_R} |\nabla h_r|^2 dx + Cr^\alpha R^{d+\alpha}.$$

Infine, siccome h_r minimizza l'integrale di Dirichlet in B_R , otteniamo

$$\int_{B_R} |\nabla v_r|^2 dx \leq \int_{B_R} |\nabla(v_r + \varphi)|^2 dx + Cr^\alpha R^{d+\alpha} \quad \text{per ogni } \varphi \in H_0^1(B_R),$$

che possiamo scrivere anche come

$$(1) \quad -2 \int_{B_R} \nabla v_r \cdot \nabla \varphi dx \leq \int_{B_R} |\nabla \varphi|^2 dx + Cr^\alpha R^{d+\alpha} \quad \text{per ogni } \varphi \in H_0^1(B_R).$$

3.3. Classificazione dei blow-up.

Osservazione 4 (Convergenza debole delle successioni di blow-up). *Sia v_{r_n} una successione di blow-up che converge a v_0 uniformemente in ogni $B_R \subset \mathbb{R}^d$. Inoltre, siccome $|\nabla v_{r_n}| \leq L$ in B_R e $v_{r_n}(0) = 0$, abbiamo che v_{r_n} è limitata in $H^1(B_R)$. In particolare, ogni sottosuccessione ammette una sottosottosuccessione che converge debole $H^1(B_R)$ a v_0 . Di conseguenza, v_{r_n} converge debole- $H^1(B_R)$ a v_0 per ogni $R > 0$.*

Lemma 5. *I blow-up della soluzione v sono funzioni armoniche su $\mathbb{R}^d$.*

Dimostrazione. Sia v_{r_n} una successione di blow-up che converge a $v_0 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ uniformemente e debole- H^1 in ogni B_R .

Fissiamo una funzione $\varphi \in H_0^1(B_R)$. Da (1) abbiamo che

$$-2 \int_{B_R} \nabla v_{r_n} \cdot \nabla \varphi dx \leq \int_{B_R} |\nabla \varphi|^2 dx + Cr_n^\alpha R^{d+\alpha}.$$

Passando al limite per $n \rightarrow +\infty$, otteniamo

$$-2 \int_{B_R} \nabla v_0 \cdot \nabla \varphi dx \leq \int_{B_R} |\nabla \varphi|^2 dx.$$

Di conseguenza,

$$\int_{B_R} |\nabla v_0|^2 dx \leq \int_{B_R} |\nabla(v_0 + \varphi)|^2 dx \quad \text{per ogni } \varphi \in H_0^1(B_R).$$

e quindi v_0 è armonica in B_R . Siccome $R > 0$ è arbitrario, otteniamo che v_0 è armonica su $\mathbb{R}^d$. $\square$

Lemma 6. *I blow-up della soluzione v sono funzioni lineari su $\mathbb{R}^d$.*

Dimostrazione. Sia $v_0 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ un blow-up di v . Allora, v_0 è armonica e lipschitziana in $\mathbb{R}^d$. In particolare, le derivate parziali $\partial_j v_0 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni armoniche e limitate in $\mathbb{R}^d$. Per il teorema di Liouville, le derivate parziali $\partial_j v_0$ sono costanti su $\mathbb{R}^d$. Di conseguenza, v_0 è della forma

$$v_0(x) = c + \nu \cdot x,$$

dove ν è il gradiente di v_0 in zero. Siccome, $v_0(0) = 0$, abbiamo che $c = 0$ e quindi v_0 è lineare. $\square$

Osservazione 7. Per mostrare la differenziabilità della funzione v in zero bisogna dimostrare che il blow-up di v in 0 è unico. Infatti, data una funzione v definita in un intorno dell'origine e tale che $v(0) = 0$, sono equivalenti:

- (i) v è differenziabile in zero;
- (ii) esiste una funzione lineare $L : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|v_r - L\|_{L^\infty(B_1)} = 0.$$

3.4. Convergenza forte delle successioni di blow-up.

Lemma 8. Sia $v_0 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ un blow-up di v in 0. Sia v_{r_n} una successione che converge a v_0 uniformemente su ogni palla B_R di $\mathbb{R}^d$. Allora, per ogni $R > 0$, v_{r_n} converge a v_0 fortemente in $H^1(B_R)$.

Dimostrazione. Possiamo supporre che

$$v_{r_n} \rightarrow v_0 \quad \text{forte-}L^2(B_R) \quad \text{e} \quad v_{r_n} \rightharpoonup v_0 \quad \text{debole-}H^1(B_R),$$

per ogni $R > 0$. Fissato $R > 0$, mostreremo che

$$v_{r_n} \rightarrow v_0 \quad \text{forte-}H^1(B_R).$$

Per semplicità scriveremo

$$v_n := v_{r_n}.$$

Sia ϕ una funzione in $C_c^\infty(B_{2R})$ tale che

$$0 \leq \phi \leq 1 \quad \text{in} \quad B_{2R} \quad \text{e} \quad \phi \equiv 1 \quad \text{su} \quad B_R.$$

Per la quasi-minimalità di v_n , esiste una successione

$$\varepsilon_n \rightarrow 0$$

tale che

$$\int_{B_{2R}} |\nabla v_n|^2 dx \leq \int_{B_{2R}} |\nabla(v_n + (v_0 - v_n)\phi)|^2 dx + \varepsilon_n.$$

Equivalentemente

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{n \rightarrow 0} \left(\int_{B_{2R}} |\nabla(v_n + (v_0 - v_n)\phi)|^2 dx - \int_{B_{2R}} |\nabla v_n|^2 dx \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow 0} \int_{B_{2R}} \left(2\nabla v_n \cdot \nabla((v_0 - v_n)\phi) + |\nabla((v_0 - v_n)\phi)|^2 \right) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow 0} \int_{B_{2R}} \left(2\phi \nabla v_n \cdot \nabla(v_0 - v_n) + |\nabla(v_0 - v_n)|^2 \phi^2 \right) dx, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la convergenza debole di $\nabla(v_n - v_0)$ e la convergenza forte di $v_n - v_0$ in L^2 . Sempre per la convergenza debole di $\nabla(v_n - v_0)$ abbiamo

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{n \rightarrow 0} \int_{B_{2R}} \left(2\phi \nabla v_n \cdot \nabla(v_0 - v_n) + |\nabla(v_0 - v_n)|^2 \phi^2 \right) dx \\ &\leq \lim_{n \rightarrow 0} \int_{B_{2R}} \left(2\phi \nabla(v_n - v_0) \cdot \nabla(v_0 - v_n) + |\nabla(v_0 - v_n)|^2 \phi^2 \right) dx, \end{aligned}$$

che possiamo scrivere anche come

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow 0} \int_{B_{2R}} \left((1 - \phi)^2 - 1 \right) |\nabla(v_0 - v_n)|^2 dx \leq \lim_{n \rightarrow 0} \int_{B_R} -|\nabla(v_0 - v_n)|^2 dx. \quad \square$$