
Formula di Bochner

Teorema 1. *Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ ed $u \in C^\infty(\Omega)$. Allora,*

$$\Delta(|\nabla u|^2) = 2\nabla(\Delta u) \cdot \nabla u + 2\|Hess(u)\|_2^2 \quad \text{dove} \quad \|Hess(u)\|_2^2 := \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d (\partial_{ij}u)^2.$$

In particolare, se u è armonica in Ω , allora

$$\Delta(|\nabla u|^2) \geq 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Corollario 2. *Sia $h \in C^\infty(B_\rho)$ una funzione armonica sulla palla $B_\rho \subset \mathbb{R}^d$. Allora,*

$$\int_{B_r} |\nabla h|^2 dx \leq \int_{B_R} |\nabla h|^2 dx \quad \text{per ogni} \quad 0 < r \leq R < \rho.$$