

CONTINUITÀ LIPSCHITZ DELLE SOLUZIONI DI EQUAZIONI ELLITTICHE IN FORMA DIVERGENZA

1. IL TEOREMA

Teorema 1. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Sia $u \in H^1(\Omega)$ una soluzione di

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f + \operatorname{div} F \quad \text{in } \Omega,$$

dove:

- A è una matrice simmetrica, uniformemente ellittica e uniformemente limitata su Ω , con coefficienti Hölder.
- $f \in L^p(\Omega)$ per un qualche $p > d$.
- $F \in C^{0,\beta}(\Omega; \mathbb{R}^d)$, per un qualche $\beta > 0$.

Allora, u è lipschitziana su ogni compatto $K \subset\subset \Omega$.

Osserviamo che basta dimostrare che dato un compatto $K \subset\subset \Omega$, esistono una costante $C > 0$ ed un raggio $R > 0$ tali per cui vale la stima

$$\int_{B_r(x_0)} |\nabla u|^2 dx \leq C \quad \text{per ogni } x_0 \in K \quad \text{ed ogni } r \leq R.$$

In particolare, basta dimostrare il lemma seguente.

Lemma 2. Siano $\rho \leq 1$, $B_\rho \in \mathbb{R}^d$ e $u \in H^1(B_\rho)$ una soluzione di

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f + \operatorname{div} F \quad \text{in } B_\rho.$$

Supponiamo che:

- $A(0) = \operatorname{Id}$ e che esistono costanti $C_A > 0$ ed $\alpha > 0$ tali che

$$(1 - C_A|x|^\alpha) \operatorname{Id} \leq A_x \leq (1 + C_A|x|^\alpha) \operatorname{Id} \quad \text{per ogni } x \in B_\rho.$$

- esistono costanti $0 < \ell \leq L$ tali che

$$\ell \operatorname{Id} \leq A_x \leq L \operatorname{Id} \quad \text{per ogni } x \in B_\rho.$$

- $f \in L^p(B_\rho)$ per un qualche $p > d$.
- esistono costanti $C_F > 0$ e β tali che

$$\sup_{x \in B_r(y)} |F(x) - F(y)| \leq C_F r^\beta \quad \text{per ogni } r \leq \rho,$$

e per ogni $y \in B_\rho$.

Allora, esiste una costante $C = C_{d,\ell,L,\alpha,\beta,p} > 0$ che dipende solo da $d, \ell, L, \alpha, \beta, p$ tale che

$$\left(\int_{B_r} |\nabla u|^2 \right)^{1/2} \leq C \left(\left(1 + (C_A \rho^\alpha)^{d/4} \right) \left(\int_{B_\rho} |\nabla u|^2 \right)^{1/2} + \rho^{1-d/p} \|f\|_{L^p(B_\rho)} + C_F \rho^\beta \right),$$

per ogni $r \leq \rho$.

2. QUASI-MINIMALITÀ DELLE SOLUZIONI

Lemma 3. Siano $B_\rho \in \mathbb{R}^d$ e $u \in H^1(B_\rho)$ una soluzione di

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f + \operatorname{div} F \quad \text{in } B_\rho.$$

Supponiamo che:

- $A(0) = \operatorname{Id}$.
- Esistono costanti $C_A > 0$ e $\alpha > 0$ tali che

$$(1 - C_A|x|^\alpha) \operatorname{Id} \leq A(x) \leq (1 + C_A|x|^\alpha) \operatorname{Id} \quad \text{per ogni } x \in B_\rho.$$

- $f \in L^p(B_\rho(x_0))$ per un qualche $p > d$.
- esistono costanti $C_F > 0$ e β tali che

$$\sup_{B_R(x_0)} |F(x) - F(x_0)| \leq C_F R^\beta \quad \text{per ogni } R \leq \rho.$$

Allora, per ogni $R \leq \rho$

$$\int_{B_R} |\nabla(u-h)|^2 dx \leq 4C_A R^\alpha \int_{B_R} |\nabla u|^2 dx + 4 \left(C_d \|f\|_{L^p(B_\rho(x_0))} R^{1-d/p} + C_F R^\beta \right)^2,$$

dove C_d è una costante dimensionale.

Dimostrazione. Per ogni $B_R \subset B_\rho$, consideriamo la soluzione del problema

$$\Delta h = 0 \quad \text{in } B_R, \quad u - h \in H_0^1(B_R).$$

Allora, per l'ottimalità di u ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(1 - C_A R^\alpha) \int_{B_R} |\nabla u|^2 dx &- \int_{B_R} f u dx - \int_{B_R} F \cdot \nabla u dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{B_R} \nabla u \cdot A_x \nabla u dx - \int_{B_R} f u - \int_{B_R} F \cdot \nabla u dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{B_R} \nabla h \cdot A_x \nabla h dx - \int_{B_R} f h - \int_{B_R} F \cdot \nabla h dx \\ &\leq \frac{1}{2}(1 + C_A R^\alpha) \int_{B_R} |\nabla h|^2 dx - \int_{B_R} f h - \int_{B_R} F \cdot \nabla h dx \end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{B_R} |\nabla(u-h)|^2 dx &= \frac{1}{2} \left(\int_{B_R} |\nabla u|^2 dx - \int_{B_R} |\nabla h|^2 dx \right) \\ &\leq C_A R^\alpha \int_{B_R} |\nabla u|^2 dx + \int_{B_R} f(u-h) dx + \int_{B_R} F \cdot \nabla(u-h) dx. \end{aligned}$$

Ora, osserviamo che

$$\begin{aligned} \int_{B_R} f(u-h) dx &\leq \left(\int_{B_R} f^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{B_R} (u-h)^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq |B_R|^{1/2-1/p} \left(\int_{B_R} f^p dx \right)^{1/p} \left(\int_{B_R} (u-h)^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq |B_R|^{1/2-1/p} \|f\|_{L^p} C_d R \left(\int_{B_R} |\nabla(u-h)|^2 dx \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} f(u-h) dx \leq C_d \|f\|_{L^p} R^{1-d/p} \left(\frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} |\nabla(u-h)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} F \cdot \nabla(u-h) dx &\leq \left(\frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} |F(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} |\nabla(u-h)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq C_F R^\beta \left(\frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} |\nabla(u-h)|^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

In conclusione, abbiamo

$$\frac{1}{2} \int_{B_R} |\nabla(u-h)|^2 dx \leq C_A R^\alpha \int_{B_R} |\nabla u|^2 dx + \left(C_d \|f\|_{L^p} R^{1-d/p} + C_F R^\beta \right) \left(\int_{B_R} |\nabla(u-h)|^2 dx \right)^{1/2},$$

che implica

$$\frac{1}{4} \int_{B_R} |\nabla(u-h)|^2 dx \leq C_A R^\alpha \int_{B_R} |\nabla u|^2 dx + \left(C_d \|f\|_{L^p} R^{1-d/p} + C_F R^\beta \right)^2.$$

□

3. DIMOSTRAZIONE DI LEMMA 2

3.1. La stima principale. Siano

$$0 < r < R \leq \rho.$$

Cosideriamo l'estensione armonica di u in B_R

$$\Delta h = 0 \quad \text{in } B_R, \quad u - h \in H_0^1(B_R).$$

Allora,

$$\begin{aligned} \left(\int_{B_r} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2} &\leq \left(\int_{B_r} |\nabla h|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_{B_r} |\nabla(u-h)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_{B_R} |\nabla h|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\frac{R^d}{r^d} \int_{B_R} |\nabla(u-h)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_{B_R} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\frac{R^d}{r^d} \int_{B_R} |\nabla(u-h)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_{B_R} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2} + \frac{R^{d/2}}{r^{d/2}} \left(4C_A R^\alpha \int_{B_R} |\nabla u|^2 dx + 4 \left(C_d \|f\|_{L^p} R^{1-d/p} + C_F R^\beta \right)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(1 + 2C_A^{1/2} R^{\alpha/2} \frac{R^{d/2}}{r^{d/2}} \right) \left(\int_{B_R} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2} + 2 \frac{R^{d/2}}{r^{d/2}} \left(C_d \|f\|_{L^p} R^{1-d/p} + C_F R^\beta \right). \end{aligned}$$

3.2. Stima iterativa. Ponendo

$$M_n = \left(\int_{B_{\rho/2^n}} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2},$$

nella stima precedente, otteniamo

$$(1) \quad M_{n+1} \leq \left(1 + \rho^{\alpha/2} \frac{2^{1+d/2} C_A^{1/2}}{2^{\alpha(n+1)/2}} \right) M_n + 2^{1+d/2} \left(\frac{C_d \rho^{1-d/p} \|f\|_{L^p}}{2^{n(1-d/p)}} + \frac{C_F \rho^\beta}{2^{n\beta}} \right),$$

per ogni $n \geq 0$.

Ora, poniamo:

- $X := \frac{1}{2^\kappa}$, dove $\kappa := \min \left\{ \frac{\alpha}{2}; \beta; 1 - \frac{d}{p} \right\}$;
- $A := \rho^{\alpha/2} C_d C_A^{1/2}$;
- $B := C_d \left(\rho^{1-d/p} \|f\|_{L^p} + \rho^\beta C_F \right)$.

Di conseguenza, abbiamo

$$M_{n+1} \leq (1 + AX^n)M_n + BX^n.$$

Mostreremo che M_n rimane limitata per $n \rightarrow +\infty$.

Osservazione 4. Osserviamo che nella definizione della costante κ (e quindi di X) abbiamo i seguenti casi particolari:

- (X1) se la matrice A è costante, allora possiamo scegliere $C_A = 0$ ed $\alpha = 2$;
- (X2) se $F = 0$, allora $C_F = 0$ e $\beta = 1$;
- (X3) se $f = 0$ oppure $f \in L^\infty$, allora $1 - \frac{d}{p} = 1$.

Lemma 5. Sia $(M_n)_{n \geq n_0}$ una successione di numeri positivi tale che

$$M_{n+1} \leq (1 + AX^n)M_n + BX^n \quad \text{per ogni } n \geq n_0,$$

dove $A > 0$, $B > 0$ e $X \in (0, 1)$ sono costanti. Allora,

$$M_n \leq \frac{M_m}{1-X} + \frac{B}{(1-X)^2} \quad \text{per ogni } n \geq m,$$

dove m è il più piccolo numero naturale tale per cui

$$m \geq n_0 \quad \text{e} \quad \frac{AX^m}{1-X} \leq X.$$

Dimostrazione. Sia

$$a_n := M_n + CX^n.$$

Allora,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= M_{n+1} + CX^{n+1} \\ &\leq (1 + AX^n)M_n + BX^n + CX^{n+1} \\ &\leq (1 + AX^n)a_n + BX^n + CX^{n+1} - (1 + AX^n)CX^n \\ &\leq (1 + AX^n)a_n + (B - (1 - X)C)X^n. \end{aligned}$$

Scegliendo

$$C = \frac{B}{1 - X},$$

abbiamo che

$$a_{n+1} \leq (1 + AX^n)a_n \quad \text{per ogni } n.$$

Supponiamo ora che per un qualche $n \geq m$

$$a_n \leq D \sum_{k=m}^n Y^k,$$

dove $D > 0$ e $Y \in (0, 1)$ sono costanti (che sceglieremo in seguito). Allora

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\leq (1 + AX^n)a_n \leq D(1 + AX^n) \sum_{k=m}^n Y^k \\ &\leq D \sum_{k=m}^{n+1} Y^k - DY^{n+1} + DAX^n \sum_{k=m}^n Y^k \\ &\leq D \sum_{k=1}^{n+2} Y^k - DY^{n+1} + \frac{DAY^m}{1 - Y} X^n. \end{aligned}$$

Scegliendo, $X = Y$ ed m abbastanza grande in modo tale che

$$\frac{AX^m}{1 - X} \leq X,$$

otteniamo che

$$a_n \leq D \sum_{k=m}^n X^k \leq \frac{DX^m}{1 - X} = \frac{a_m}{1 - X} \quad \text{per ogni } n \geq m,$$

dove abbiamo scelto D in modo di avere $DX^m = a_m$. □

3.3. Conclusione. Usando Lemma 5 e la stima (1), otteniamo che per ogni $n \geq m$

$$\begin{aligned} \left(\int_{B_{\rho/2^n}} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2} &\leq \frac{1}{1 - X} \left(\int_{B_{\rho/2^m}} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2} + \frac{C_d}{(1 - X)^2} (\rho^{1-d/p} \|f\|_{L^p} + \rho^\beta C_F) \\ &\leq \frac{2^{md}}{1 - X} \left(\int_{B_\rho} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2} + \frac{C_d}{(1 - X)^2} (\rho^{1-d/p} \|f\|_{L^p} + \rho^\beta C_F), \end{aligned}$$

dove m è un qualsiasi numero naturale tale che

$$\rho^{\alpha/2} C_d C_A^{1/2} \frac{X^m}{1 - X} \leq X.$$

In particolare, essendo $\rho < 1$, possiamo scegliere m come il più piccolo numero naturale tale per cui

$$C_d C_A^{1/2} \frac{X^m}{1 - X} \leq X.$$

In questo modo m dipende soltanto da C_1 , α , d/p , β e la dimensione. Questo conclude la dimostrazione del Lemma 2.

3.4. Stima del gradiente. Un corollario del Lemma 3 è la ben nota stima del gradiente.

Proposizione 6. Siano $B_R \in \mathbb{R}^d$ e $u \in H^1(B_R)$ una soluzione di

$$-\Delta u = f \quad \text{in } B_R,$$

dove $f \in L^p(B_R)$ per un qualche $p > d$. Allora, esiste una costante dimensionale $C_d > 0$ tale che

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(B_{R/2})} \leq C_d \left(\frac{1}{R} \|u\|_{L^\infty(B_R)} + R^{1-d/p} \|f\|_{L^p(B_R)} \right).$$

Dimostrazione. Per il Lemma 2 sappiamo che esiste una costante dimensionale $C_d > 0$ tale che

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(B_{R/2})} \leq C_d \left(\left(\int_{B_{3R/2}} |\nabla u|^2 \right)^{1/2} + R^{1-d/p} \|f\|_{L^p(B_R)} \right).$$

Per la disuguaglianza di Caccioppoli, invece

$$\int_{B_{3R/2}} |\nabla u|^2 \leq C_d \frac{1}{R^2} \int_{B_R} u^2 \leq C_d \frac{1}{R^2} \|u\|_{L^\infty(B_R)}^2.$$

□

4. CONTINUITÀ LIPSCHITZ FINO AL BORDO

Teorema 7. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ con bordo $C^{1,\alpha}$. Sia $u \in H^1(\Omega)$ una soluzione di

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f + \operatorname{div} F & \text{in } \Omega \cap B_\rho \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \cap B_\rho, \end{cases}$$

dove:

- A è una matrice simmetrica, uniformemente ellittica e uniformemente limitata su Ω , con coefficienti Hölder.
- $f \in L^p(\Omega)$ per un qualche $p > d$.
- $F \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^d)$, per un qualche $\alpha > 0$.
- $g \in C^{1,\alpha}(B_\rho)$.

Allora, $u \in C^{0,1}(B_{\rho/2} \cap \bar{\Omega})$.

Ragionando come nella dimostrazione del Lemma 2, otteniamo

Lemma 8. Siano H un iperpiano in $\mathbb{R}^d$ con vettore normale $\nu \in \mathbb{R}^d$. Definiamo

$$H^+ := \{x \in \mathbb{R}^d : x \cdot \nu > 0\}.$$

Siano $\bar{x} \in H$, $B_R(\bar{x}) \subset \mathbb{R}^d$ e $u \in H^1(B_R(\bar{x}))$ una soluzione di

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f + \operatorname{div} F & \text{in } B_R(\bar{x}) \cap H^+, \\ u = 0 & \text{su } B_R(\bar{x}) \setminus H^+. \end{cases}$$

Supponiamo che:

- esistono costanti $C_A > 0$ e $\alpha > 0$ tali che

$$(1 - C_A|x - y|^\alpha) A_y \leq A_x \leq (1 + C_A|x - y|^\alpha) A_y \quad \text{per ogni } x, y \in B_R(\bar{x}).$$

- esistono costanti $0 < \ell \leq L$ tali che

$$\ell \operatorname{Id} \leq A_x \leq L \operatorname{Id} \quad \text{per ogni } x \in B_\rho(\bar{x}).$$

- $f \in L^p(B_R(\bar{x}))$ per un qualche $p > d$.
- esistono costanti $C_F > 0$ e β tali che

$$\sup_{x \in B_r(y)} |F(x) - F(y)| \leq C_F r^\beta \quad \text{per ogni } r \leq R,$$

e per ogni $y \in B_R(\bar{x})$.

Allora, esiste una costante $C = C_{d,\ell,L,\alpha,\beta,p} > 0$ che dipende solo da $d, \ell, L, \alpha, \beta, p$ tale che

$$\left(\int_{B_r \cap H^+} |\nabla u|^2 \right)^{1/2} \leq C \left(\left(1 + (C_A R^\alpha)^{d/4} \right) \left(\int_{B_R(\bar{x}) \cap H^+} |\nabla u|^2 \right)^{1/2} + R^{1-d/p} \|f\|_{L^p(B_R)} + C_F R^\beta \right),$$

per ogni $r \leq R$.

4.1. Dimostrazione di Teorema 7. Supponiamo che

$$\Omega = H^+ \quad \text{e} \quad g = 0.$$

Sia $x_0 \in B_{\rho/4} \cap H^+$. Sia $y_0 \in B_{\rho/4} \cap H^+$ la proiezione di x_0 su H e sia $r_0 = |x_0 - y_0|$.

Per il Lemma 8, prendendo

$$R_0 = 2r_0,$$

abbiamo

$$\left(\int_{B_{R_0}(y_0) \cap H^+} |\nabla u|^2 \right)^{1/2} \leq C \left(\left(1 + (C_A \rho^\alpha)^{d/4} \right) \left(\int_{B_\rho \cap H^+} |\nabla u|^2 \right)^{1/2} + \rho^{1-d/p} \|f\|_{L^p(B_\rho)} + C_F \rho^\beta \right),$$

dove $C = C_{d,\ell,L,\alpha,\beta,p}$. Ora, siccome

$$B_{r_0}(x_0) \subset B_{R_0}(y_0) \cap H^+$$

esiste una costante dimensionale $C_d > 0$ tale che

$$\int_{B_{r_0}(x_0)} |\nabla u|^2 \leq C_d \int_{B_{R_0}(y_0) \cap H^+} |\nabla u|^2.$$

Di conseguenza,

$$\left(\int_{B_{r_0}(x_0)} |\nabla u|^2 \right)^{1/2} \leq C \left(\left(1 + (C_A \rho^\alpha)^{d/4} \right) \left(\int_{B_\rho \cap H^+} |\nabla u|^2 \right)^{1/2} + \rho^{1-d/p} \|f\|_{L^p(B_\rho)} + C_F \rho^\beta \right).$$

D'altra parte, usando Proposizione 2, abbiamo

$$|\nabla u(x_0)| \leq C \left(\left(1 + (C_A r_0^\alpha)^{d/4} \right) \left(\int_{B_{r_0}(x_0)} |\nabla u|^2 \right)^{1/2} + r_0^{1-d/p} \|f\|_{L^p(B_\rho)} + C_F r_0^\beta \right).$$

Mettendo le due stime insieme, otteniamo che $|\nabla u|$ è limitato in $B_{\rho/4}$. □

BIBLIOGRAFIA

La dimostrazione della continuità Lipschitz delle soluzioni (Teorema 1) è un miglioramento della classica dimostrazione della continuità Hölder delle soluzioni.

[GT] D. Gilbarg, N. S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer-Verlag Berlin (2001).

[J] J. Jost. *Partial differential equations*. Springer-Verlag New York (2002).