

REGOLARITÀ $C^{k,\alpha}$ DELLE SOLUZIONI DI PROBLEMI ELLITTICI IN FORMA DIVERGENZAREGOLARITÀ $C^{1,\alpha}$

Setting. Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ ed A una matrice a coefficienti variabili con le seguenti proprietà:

- i coefficienti a_{ij} di A sono funzioni Hölder continue:

$$a_{ij} \in C^{0,\alpha}(\Omega) \quad \text{per ogni coppia di indici } 1 \leq i, j \leq d.$$

- A è simmetrica:

$$a_{ij} \equiv a_{ji} : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{per } 1 \leq i, j \leq d,$$

- A è uniformemente ellittica e uniformemente limitata su Ω , ovvero esistono costanti $0 < c \leq C$ tali che

$$c \text{Id} \leq A(x) \leq C \text{Id} \quad \text{per ogni } x \in \Omega.$$

Useremo il teorema seguente per ottenere la regolarità di ordine superiore delle soluzioni di alcuni problemi ellittici in forma divergenza.

Teorema 1 ($C^{1,\alpha}$ Schauder all'interno). *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ e siano*

- A una matrice simmetrica, uniformemente ellittica e limitata su Ω , con coefficienti Hölder.
- $f \in L^p(\Omega)$ per un qualche $p > d$.
- $F \in C^{0,\alpha}(\Omega; \mathbb{R}^d)$, per un qualche $\alpha > 0$.

Se $u \in H^1(\Omega)$ è una soluzione di

$$-\text{div}(A(x)\nabla u) = f + \text{div } F \quad \text{in } \Omega,$$

allora esiste $\alpha > 0$ tale che $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$.

STIME DI SCHAUDER CLASSICHE

Teorema 2 (Regolarità $C^{2,\alpha}$ all'interno). *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Sia $u \in H^1(\Omega)$ una soluzione di*

$$-\text{div}(A(x)\nabla u) = f \quad \text{in } \Omega,$$

dove:

- A è una matrice simmetrica, uniformemente ellittica e uniformemente limitata su Ω , con coefficienti $C^{1,\alpha}$ per un qualche $\alpha > 0$.
- $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, per un qualche $\alpha > 0$.

Allora, esiste $\alpha > 0$ tale che $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$.

Proof. Applicando Teorema 1, abbiamo che $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$. Inoltre, per ogni $j = 1, \dots, d$ e per ogni $D \Subset \Omega$ la derivata debole $\partial_j u$ è in $H^1(D)$ e

$$-\text{div}(A(x)\nabla(\partial_j u)) = \text{div}(F_j + (\partial_j A)\nabla u) \quad \text{in } \Omega,$$

dove i coefficienti della matrice $\partial_j A$ sono le derivate deboli dei coefficienti di A ; mentre $F_j(x) = f(x)e_j$ è il campo vettoriale

$$F_j = (0, \dots, f, \dots, 0) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d.$$

Ora, come conseguenza di Teorema 1, abbiamo che $\partial_j u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$. □

Come corollario, si ha il risultato seguente.

Teorema 3 (Regolarità $C^{k,\alpha}$ all'interno). *Sia $k > 2$. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Sia $u \in H^1(\Omega)$ una soluzione di*

$$-\text{div}(A(x)\nabla u) = f \quad \text{in } \Omega,$$

dove:

- A è una matrice simmetrica, uniformemente ellittica e uniformemente limitata su Ω , con coefficienti $C^{k-1,\alpha}$ per un qualche $\alpha > 0$.
- $f \in C^{k-2,\alpha}(\Omega)$, per un qualche $\alpha > 0$.

Allora, esiste $\alpha > 0$ tale che $u \in C^{k,\alpha}(\Omega)$.