

Problemi ellittici in forma divergenza

1. MATRICI SIMMETRICHE A COEFFICIENTI COSTANTI

Definizione 1. Siano M ed N due matrici $d \times d$ simmetriche a coefficienti reali. Diciamo che $M \leq N$, se

$$v \cdot Mv \leq v \cdot Nv \quad \text{per ogni vettore } v \in \mathbb{R}^d.$$

Lemma 2. Siano M ed N due matrici $d \times d$ simmetriche a coefficienti reali. Sia U una matrice $d \times d$ invertibile a coefficienti reali. Allora,

$$M \leq N \quad \text{se e solo se} \quad U^t M U \leq U^t N U.$$

Proposizione 3. Sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & \dots & a_{dd} \end{pmatrix}$$

una matrice simmetrica (a coefficienti reali). Siano $\lambda_1(A), \dots, \lambda_d(A)$ gli autovalori della matrice A e siano $\ell \leq L$ due costanti positive. Allora, sono equivalenti:

- (i) $\ell \leq \lambda_i(A) \leq L$, per ogni $i = 1, \dots, d$;
- (ii) $\ell \text{Id} \leq A \leq L \text{Id}$.

Corollario 4. Sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & \dots & a_{dd} \end{pmatrix}$$

una matrice simmetrica (a coefficienti reali) tale che

$$\ell \text{Id} \leq A \leq L \text{Id} \quad \text{dove} \quad 0 < \ell \leq L < +\infty.$$

Allora, per ogni $B_R \subset \mathbb{R}^d$ abbiamo

$$B_{\ell R} \subset A(B_R) \subset B_{LR}.$$

Proposizione 5. Sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & \dots & a_{dd} \end{pmatrix}$$

una matrice simmetrica (a coefficienti reali) tale che

$$\ell \text{Id} \leq A \leq L \text{Id} \quad \text{dove} \quad 0 < \ell \leq L < +\infty.$$

Sia U la matrice unitaria tale che

$$A = U^t D(\lambda_1, \dots, \lambda_d) U,$$

dove $D(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ è la matrice diagonale

$$D(\lambda_1, \dots, \lambda_d) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_d \end{pmatrix}$$

Allora, la matrice

$$B := U^t D\left(\lambda_1^{-1/2}, \dots, \lambda_d^{-1/2}\right) U$$

è una matrice simmetrica con le proprietà seguenti:

- $BAB = \text{Id}$;
- $L^{-1/2} \text{Id} \leq B \leq \ell^{-1/2} \text{Id}$.

2. L'EQUAZIONE

Il dominio. Siano Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$.

La funzione f . Sia $f \in L^p(\Omega)$ per un qualche $p \geq d$.

Il campo F . Sia $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$,

$$F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ \vdots \\ F_d(x) \end{pmatrix}$$

un campo vettoriale tale per cui esistono due costanti

$$C_F > 0 \quad \text{e} \quad \beta > 0,$$

tali che

$$|F(x) - F(y)| \leq C_F |x - y|^\beta \quad \text{per ogni} \quad x, y \in \Omega.$$

L'operatore. Sia A una matrice simmetrica a coefficienti variabili

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1d}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1}(x) & \dots & a_{dd}(x) \end{pmatrix}$$

con le seguenti proprietà:

- I coefficienti di A sono funzioni Hölder continue:

$$a_{ij} \in C^{0,\alpha}(\Omega) \quad \text{per ogni coppia di indici} \quad 1 \leq i, j \leq d.$$

In particolare, supponiamo che esistono due costanti C_A e $\alpha > 0$ tali che per ogni a_{ij}

$$|a_{ij}(x) - a_{ij}(y)| \leq C_A |x - y|^\alpha \quad \text{per ogni} \quad x, y \in \Omega.$$

- A è uniformemente ellittica e uniformemente limitata su Ω , ovvero esistono costanti $0 < \ell \leq L$ tali che

$$\ell \text{Id} \leq A(x) \leq L \text{Id} \quad \text{per ogni} \quad x \in \Omega.$$

La soluzione. Diciamo che una funzione $u \in H^1(\Omega)$ è una soluzione debole del problema

$$-\text{div}(A(x)\nabla u) = f + \text{div} F \quad \text{in} \quad \Omega,$$

se

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot A(x) \nabla u \, dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi \, dx - \int_{\Omega} F(x) \cdot \nabla \varphi \, dx \quad \text{per ogni} \quad \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

3. CAMBIAMENTO DELLE VARIABILI

La matrice B . Sia B una matrice simmetrica a coefficienti costanti. Come unica ipotesi su B , supponiamo che vale la stima

$$L^{-1/2} \text{Id} \leq B \leq \ell^{-1/2} \text{Id}.$$

Allora, osserviamo che

$$L^{-d/2} \leq \det B \leq \ell^{-d/2}.$$

In particolare, B è invertibile, B^{-1} è simmetrica e si ha che

$$\ell^{1/2} \text{Id} \leq B^{-1} \leq L^{1/2} \text{Id}.$$

Inoltre,

$$|B^{-1}x| \leq L^{1/2}|x| \quad \text{per ogni} \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Il cambio di variabile. Consideriamo l'insieme aperto limitato $B(\Omega)$ e la funzione

$$v : B(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad v(x) := u(B^{-1}x).$$

L'equazione per v . Data una funzione test

$$\psi \in C_c^\infty(B(\Omega)),$$

consideriamo la funzione $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, definita come

$$\varphi(x) = \psi(Bx).$$

Allora, siccome u è soluzione in Ω , abbiamo che

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot A(x) \nabla u \, dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) \, dx - \int_{\Omega} F(x) \cdot \nabla \varphi(x) \, dx.$$

Quindi, calcoliamo:

(i) Definiamo la matrice simmetrica

$$\tilde{A}_y := BA_{B^{-1}y}B \quad \text{per ogni } y \in B(\Omega).$$

Si ha quindi che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \varphi(x) \cdot A_x \nabla u(x) \, dx &= \frac{1}{|\det B|} \int_{B(\Omega)} \nabla \psi(y) \cdot (BA_{B^{-1}y}B) \nabla v(y) \, dy \\ &= \frac{1}{|\det B|} \int_{B(\Omega)} \nabla \psi(y) \cdot \tilde{A}_y \nabla v(y) \, dy. \end{aligned}$$

Inoltre, valgono le stime

$$\frac{\ell}{L} \text{Id} \leq \tilde{A}_y \leq \frac{L}{\ell} \text{Id} \quad \text{per ogni } y \in B(\Omega),$$

e se $\tilde{a}_{ij} : B(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ sono i coefficienti di $\tilde{A}$, allora

$$\begin{aligned} |\tilde{a}_{ij}(x) - \tilde{a}_{ij}(y)| &= |e_i \cdot \tilde{A}_x e_j - e_i \cdot \tilde{A}_y e_j| \\ &= |e_i \cdot (\tilde{A}_x - \tilde{A}_y) e_j| \\ &= |(Be_i) \cdot (A_{B^{-1}x} - A_{B^{-1}y})[Be_j]| \\ &\leq |Be_i| |Be_j| \|A_{B^{-1}x} - A_{B^{-1}y}\|_2 \\ &\leq |Be_i| |Be_j| dC_A |B^{-1}x - B^{-1}y|^\alpha \\ &\leq \ell^{-1} L^{\alpha/2} dC_A |x - y|^\alpha. \end{aligned}$$

(ii) Se le funzioni

$$f \in L^2(\Omega) \quad \text{e} \quad g \in L^2(B(\Omega))$$

sono tali che

$$f(x) = g(Bx) \quad \text{per ogni } x \in \Omega.$$

Allora,

$$\int_{\Omega} f(x) \varphi(x) \, dx = \frac{1}{|\det(B)|} \int_{B(\Omega)} \psi(y) g(y) \, dy.$$

Inoltre,

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p \, dx = \frac{1}{|\det(B)|} \int_{B(\Omega)} |g(y)|^p \, dy,$$

e quindi

$$\int_{B(\Omega)} |g(y)|^p \, dy \leq L^{d/2} \int_{\Omega} |f(x)|^p \, dx.$$

(iii) Se i campi vettoriali

$$F \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^d) \quad \text{e} \quad G \in L^2(B(\Omega); \mathbb{R}^d)$$

sono tali che

$$F(x) = B[G(Bx)] \quad \text{per ogni } x \in \Omega.$$

Allora,

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi(x) \cdot F(x) \, dx = \frac{1}{|\det(B)|} \int_{B(\Omega)} \nabla \psi(y) \cdot G(y) \, dy.$$

Inoltre,

$$\begin{aligned}
|G(x) - G(y)| &= \left| B^{-1}F(B^{-1}x) - B^{-1}F(B^{-1}y) \right| \\
&\leq L^{1/2} \left| F(B^{-1}x) - F(B^{-1}y) \right| \\
&\leq L^{1/2} C_F |B^{-1}x - B^{-1}y|^\beta \\
&\leq L^{\frac{1+\beta}{2}} C_F |x - y|^\beta
\end{aligned}$$

Abbiamo quindi dimostrato che v è soluzione di

$$-\operatorname{div}(\tilde{A} \nabla v) = g + \operatorname{div} G \quad \text{in } B(\Omega),$$

dove $\tilde{A}$, G e g soddisfano le stime seguenti:

$$\begin{aligned}
\frac{\ell}{L} \operatorname{Id} &\leq \tilde{A}_y \leq \frac{L}{\ell} \operatorname{Id} \quad \text{per ogni } y \in B(\Omega); \\
|\tilde{a}_{ij}(x) - \tilde{a}_{ij}(y)| &\leq \ell^{-1} L^{\alpha/2} dC_A |x - y|^\alpha \quad \text{per ogni } x, y \in B(\Omega); \\
\|g\|_{L^p(B(\Omega))} &\leq L^{d/2p} \|f\|_{L^p(\Omega)}; \\
|G(x) - G(y)| &\leq L^{\frac{1+\beta}{2}} C_F |x - y|^\beta \quad \text{per ogni } x, y \in B(\Omega).
\end{aligned}$$

4. SULLA CONTINUITÀ DELLE MATRICI A COEFFICIENTI VARIABILI

Lemma 6. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme aperto ed*

$$A_x = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1d}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1}(x) & \dots & a_{dd}(x) \end{pmatrix}$$

una matrice simmetrica a coefficienti variabili definita su Ω . Supponiamo che $x_0 \in \Omega$ sia tale che A_{x_0} e che esistono costanti $C > 0$ ed $\alpha > 0$ tali che per ogni coefficiente $a_{ij} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ vale la stima

$$|a_{ij}(x) - a_{ij}(x_0)| \leq C|x - x_0|^\alpha \quad \text{per ogni } x \in \Omega.$$

Allora,

$$(1 - dC|x - x_0|^\alpha) \operatorname{Id} \leq A_x \leq (1 + dC|x - x_0|^\alpha) \operatorname{Id} \quad \text{per ogni } x \in \Omega.$$

In particolare, data una palla $B_r(x_0) \subset \Omega$, si ha

$$(1 - dCr^\alpha) \int_{B_r(x_0)} |\nabla \varphi|^2 dx \leq \int_{B_r(x_0)} \nabla \varphi(x) \cdot A_x \nabla \varphi(x) dx \leq (1 + dCr^\alpha) \int_{B_r(x_0)} |\nabla \varphi|^2 dx,$$

per ogni $\varphi \in H^1(B_r(x_0))$.