FUNZIONI ARMONICHE IN SENSO DI VISCOSITÀ

1. UNA DEFINIZIONE PRELIMINARE

Definizione 1. Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni continue.

- Diciamo che φ tocca u da sotto nel punto $x_0 \in \Omega$, se $u(x_0) = \varphi(x_0)$ e se la funzione $u - \varphi$ ha un minimo locale in x_0 .
- Diciamo che φ tocca u da sopra nel punto $x_0 \in \Omega$, se $u(x_0) = \varphi(x_0)$ e se la funzione $u - \varphi$ ha un massimo locale in x_0 .
- Diciamo che φ tocca u strettamente da sotto nel punto $x_0 \in \Omega$, se $u(x_0) = \varphi(x_0)$ e $\varphi(x) < u(x)$ per ogni $x \neq x_0$ in un intorno di x_0 .
- Diciamo che φ tocca u strettamente da sopra nel punto $x_0 \in \Omega$, se $u(x_0) = \varphi(x_0)$ e $\varphi(x) > u(x)$ per ogni $x \neq x_0$ in un intorno di x_0 .

2. SOLUZIONI IN SENSO DI VISCOSITÀ. DEFINIZIONI EQUIVALENTI

Definizione 2. Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Diciamo che u è soluzione di

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega$$

in senso di viscosità, se:

- per ogni funzione test $\varphi \in \mathcal{T}(\Omega)$ che tocca u da sotto in un qualche punto $x_0 \in \Omega$ si ha $\Delta\varphi(x_0) \leq 0$;
- per ogni funzione test $\varphi \in \mathcal{T}(\Omega)$ che tocca u da sopra in un qualche punto $x_0 \in \Omega$ si ha $\Delta\varphi(x_0) \geq 0$.

Come spazio di funzioni test possiamo usare:

- $\mathcal{T}(\Omega) = C^\infty(\Omega)$;
- $\mathcal{T}(\Omega) = C^2(\Omega)$;
- $\mathcal{T}(\Omega) =$ "i polinomi di grado 2".

Definizione 3. Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Diciamo che u è soluzione di

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega$$

in senso di viscosità, se:

- per ogni funzione test $\varphi \in \mathcal{T}(\Omega)$ che tocca u **strettamente** da sotto in un qualche punto $x_0 \in \Omega$ si ha $\Delta\varphi(x_0) \leq 0$;
- per ogni funzione test $\varphi \in \mathcal{T}(\Omega)$ che tocca u **strettamente** da sopra in un qualche punto $x_0 \in \Omega$ si ha $\Delta\varphi(x_0) \geq 0$.

Come spazio di funzioni test possiamo usare:

- $\mathcal{T}(\Omega) = C^\infty(\Omega)$;
- $\mathcal{T}(\Omega) = C^2(\Omega)$;
- $\mathcal{T}(\Omega) =$ "i polinomi di grado 2".

Osservazione 4. Definizione 2 e Definizione 3 sono equivalenti. Infatti, basta osservare che:

- se φ tocca da sopra la funzione u in x_0 , allora per ogni $\varepsilon > 0$ la funzione

$$\varphi(x) + \varepsilon|x - x_0|^2$$

tocca u strettamente da sopra in x_0 (e rimane nella stessa classe di funzioni test);

- se φ tocca da sotto la funzione u in x_0 , allora per ogni $\varepsilon > 0$ la funzione

$$\varphi(x) - \varepsilon|x - x_0|^2$$

tocca u strettamente da sotto in x_0 (e rimane nella stessa classe di funzioni test).

In Definizione 2 e Definizione 3 le scelte dello spazio test $\mathcal{T}(\Omega)$ sono tutte equivalenti. Infatti, vale la seguente

Proposizione 5. Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ e $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora, sono equivalenti:

- (i) $\Delta u = 0$ in senso della Definizione 2 con funzioni test $\mathcal{T}(\Omega) = \text{"i polinomi di grado 2"}$;
- (ii) $\Delta u = 0$ in senso della Definizione 2 con funzioni test $\mathcal{T}(\Omega) = C^2(\Omega)$;
- (iii) $\Delta u = 0$ in senso della Definizione 2 con funzioni test $\mathcal{T}(\Omega) = C^\infty(\Omega)$.

Proof. Siccome

$$\text{"i polinomi di grado 2"} \subset C^2(\Omega) \subset C^\infty(\Omega),$$

abbiamo che

$$(iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i).$$

Quindi, basta dimostrare che (i) $\Rightarrow$ (iii). Siano $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ una funzione test che tocca u da sopra in $x_0 \in \Omega$ e P_2 il polinomio di Taylor del secondo grado di φ in x_0 . Allora,

$$\Delta\varphi(x_0) = \Delta P_2(x_0).$$

Inoltre, siccome

$$u(x) \leq \varphi(x) = P_2(x) + o(|x - x_0|^2),$$

abbiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ il polinomio

$$P_{2,\varepsilon}(x) := P_2(x) + \varepsilon|x - x_0|^2$$

tocca u (strettamente) da sopra in x_0 . Quindi, per ipotesi,

$$0 \leq \Delta P_{2,\varepsilon}(x_0) = \Delta P_2(x_0) + 2d\varepsilon.$$

Passando al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ abbiamo la tesi. □

3. SOLUZIONI IN SENSO DI VISCOSITÀ E SOLUZIONI CLASSICHE

Proposizione 6. Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora, sono equivalenti:

- (i) $u \in C^\infty(\Omega)$ e $\Delta u = 0$ su Ω ;
- (ii) $\Delta u = 0$ in senso di viscosità in Ω .

Proof. L'implicazione (i) $\Rightarrow$ (ii) segue dal principio del massimo forte. Mostriamo che (ii) $\Rightarrow$ (i).

Siccome u è continua in Ω , sappiamo che, data una palla $B_r \subset \Omega$, esiste una funzione continua

$$u_0 : \overline{B}_r \rightarrow \mathbb{R},$$

soluzione del problema

$$\begin{cases} \Delta u_0 = 0 & \text{in } B_r, \\ u_0 = u & \text{su } \partial B_r. \end{cases}$$

Basta quindi dimostrare che u coincide con u_0 in B_r . Mostriamo che $u_0 \leq u$.

Supponiamo per assurdo che esiste un punto $x_0 \in B_r$ tale che

$$\delta := u_0(x_0) - u(x_0) > 0.$$

Consideriamo la funzione

$$w(x) = \varepsilon^2 \frac{1}{2d} \left((2r)^2 - |x|^2 \right) \quad (\text{si ha quindi che } w \geq 0 \text{ in } B_{2r}).$$

Si ha che $-\Delta w = \varepsilon^2 > 0$ in B_r . Inoltre, scegliendo ε abbastanza piccolo

$$u_0(x_0) - w(x_0) - u(x_0) \geq \frac{\delta}{4} \quad \text{e} \quad (u_0 - w) - u \leq \frac{\delta}{16} \quad \text{su } \partial B_r.$$

Il massimo della funzione continua

$$\overline{B}_r \ni x \mapsto (u_0(x) - w(x)) - u(x)$$

e quindi raggiunto in un punto interno $y_0 \in B_r$. In particolare, la funzione

$$x \mapsto (u_0(x) - w(x)) + u(y_0) - (u_0(y_0) - w(y_0))$$

tocca u da sotto in y_0 . Ma questo è un assurdo perché $\Delta(u_0(y_0) - w(y_0)) > 0$. □