Teorema di De Giorgi

1. Teorema di De Giorgi

Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e $f \in L^1(\Omega)$. Ricordiamo che una funzione $u \in H^1(\Omega)$ è una soluzione debole del problema
$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = f \quad \text{in} \quad \Omega\ ,$$
se
$$\int_\Omega \nabla v \cdot A(x)\nabla u\,dx = \int_\Omega f(x)v\,dx \qquad \text{per ogni} \qquad v \in H^1_0(\Omega),$$
dove in questa sezione la matrice
$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1d}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1}(x) & \dots & a_{dd}(x) \end{pmatrix}$$
è una matrice simmetrica ed uniformemente ellittica a coefficienti variabili
$$a_{ij} \equiv a_{ji}\,:\,\Omega \to \mathbb{R} \qquad \text{per} \qquad 1 \le i,j \le d,$$
che sono funzioni misurabili su Ω tali che
$$c_{\rm A}\,\mathrm{Id} \le A(x) \le C_{\rm A}\,\mathrm{Id} \quad \text{per ogni} \quad x \in \Omega, \tag{1}$$
dove $0 < c_{\rm A} \le C_{\rm A}$ sono costanti.

In questa nota dimostreremo il teorema seguente.

Teorema 1 (De Giorgi)**.** *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e $A(x)$ una matrice simmetrica a coefficienti variabili su Ω che soddisfa (1). Sia $u \in H^1(\Omega)$ una soluzione di*
$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = 0 \quad \textit{in} \quad \Omega,$$
Allora
$$u \in C^{0,\alpha}(\Omega),$$
ovvero per ogni $x_0 \in \Omega$ esistono un raggio $r > 0$ ed una costante $L > 0$ tali che
$$|u(x) - u(y)| \le L|x-y|^\alpha \qquad \textit{per ogni} \qquad x,y \in B_r(x_0).$$

Osserviamo che vale anche il seguente teorema più generale.

Teorema 2 (De Giorgi)**.** *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e $A(x)$ una matrice simmetrica a coefficienti variabili su Ω che soddisfa (1). Sia $u \in H^1(\Omega)$ una soluzione di*
$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = \mathrm{div}F + f \quad \textit{in} \quad \Omega,$$
dove $f \in L^p(\Omega)$ con $p > d/2$ ed $F \in L^q(\Omega;\mathbb{R}^d)$ con $q > d$. Allora
$$u \in C^{0,\alpha}(\Omega),$$
ovvero per ogni $x_0 \in \Omega$ esistono un raggio $r > 0$ ed una costante $L > 0$ tali che
$$|u(x) - u(y)| \le L|x-y|^\alpha \qquad \textit{per ogni} \qquad x,y \in B_r(x_0).$$

Teorema 3 (De Giorgi fino al bordo)**.** *Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$ che soddisfa la stima di densita esterna:*

esistono due costanti $r_0 > 0$ e $c \in (0,1)$ tali che
per ogni $x_0 \in \partial\Omega$ e per ogni $r \in (0,r_0)$ si ha la stima
$$\big|B_r(x_0) \cap \Omega\big| \le (1-c)|B_r|.$$
Sia $A(x)$ una matrice simmetrica a coefficienti variabili su Ω che soddisfa (1). Sia $u \in H^1_0(\Omega)$ una soluzione di
$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = \mathrm{div}F + f \quad \textit{in} \quad \Omega\ , \qquad u \in H^1_0(\Omega),$$
dove $f \in L^p(\Omega)$ con $p > d/2$ ed $F \in L^q(\Omega;\mathbb{R}^d)$ con $q > d$. Allora $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, ovvero esistono $L,\alpha > 0$ tali che
$$|u(x) - u(y)| \le L|x-y|^\alpha \qquad \textit{per ogni} \qquad x,y \in \overline{\Omega}.$$

2. Disuguaglianze di Caccioppoli

Lemma 4 (Disuguaglianza di Caccioppoli). *Se $u \in H^1(B_1)$ è soluzione del problema*

$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = f \quad in \quad B_1 \ ,$$

dove

$$c_A \,\mathrm{Id} \le A(x) \le C_A \,\mathrm{Id} \quad per\ ogni \quad x \in \Omega,$$

Allora, per ogni $\varphi \in C^\infty_c(B_1)$ si ha

$$c_A \int_{B_1} |\nabla(\varphi u)|^2 \,dx \le C_A \int_{B_1} |\nabla\varphi|^2 u^2 \,dx + \int_{B_1} \varphi^2 u f \,dx.$$

Lemma 5 (Disuguaglianza di Caccioppoli II). *Se $u \in H^1(B_1)$ è soluzione del problema*

$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = f \quad in \quad B_1 \ ,$$

dove

$$c_A \,\mathrm{Id} \le A(x) \le C_A \,\mathrm{Id} \quad per\ ogni \quad x \in \Omega,$$

Allora, per ogni $\varphi \in C^\infty_c(B_1)$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha

$$c_A \int_{B_1} \big|\nabla\big(\varphi(u-t)_+\big)\big|^2 \,dx \le C_A \int_{B_1} |\nabla\varphi|^2 (u-t)_+^2 \,dx + \int_{B_1} \varphi^2 (u-t)_+ f \,dx.$$

---

3. Stima $L^2 - L^\infty$

Lemma 6. *Sia $u \in H^1(B_\rho)$ una soluzione di*

$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = 0 \quad in \quad B_\rho \ ,$$

dove la matrice A è tale che:

$$c_A \,\mathrm{Id} \le A(x) \le C_A \,\mathrm{Id} \quad per\ ogni \quad x \in B_\rho \,.$$

Allora,

$$\|u_+\|^2_{L^\infty(B_{\rho/2})} \le \kappa_A^{d/2}\, C_d \fint_{B_\rho} u_+^2 \,dx,$$

dove $\kappa_A = \frac{C_A}{c_A}$.

Dimostrazione. Dimostreremo il lemma in dimensione $d \ge 3$.

- Siano $\varphi \in C^\infty_c(B_1)$ e $T > 0$. Allora
$$\int \big|\nabla\big(\varphi(u-T)_+\big)\big|^2 \,dx \le \kappa_{\mathrm{A}} \int |\nabla\varphi|^2 (u-T)_+^2 \,dx \,.$$
- Usando la disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev, dedurre che
$$\left(\int \big(\varphi(u-T)_+\big)^{\frac{2d}{d-2}} \,dx\right)^{\frac{d-2}{d}} \le \kappa_{\mathrm{A}}\, C_d \int |\nabla\varphi|^2 (u-T)_+^2 \,dx.$$
- Ora, supponiamo che
$$\varphi = 1 \quad \text{in} \quad B_r \ , \qquad 0 \le \varphi \le 1 \quad \text{in} \quad B_R \setminus B_r \ , \qquad \varphi = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^d \setminus B_R \ .$$
  Quindi
$$\kappa_{\mathrm{A}}\, C_d \int_{B_R} |\nabla\varphi|^2 (u-T)_+^2 \,dx \le \frac{\kappa_{\mathrm{A}}\, C_d}{(R-r)^2} \int_{B_R} (u-T)_+^2 \,dx$$
  ed anche
$$\int_{B_r} (u-T)_+^2 \,dx \le |\Omega_T \cap B_r|^{\frac{2}{d}} \left(\int_{B_r} (u-T)_+^{\frac{2d}{d-2}}\right)^{\frac{d-2}{d}} \le |\Omega_T \cap B_r|^{2/d} \left(\int_{B_R} \big(\varphi(u-T)_+\big)^{\frac{2d}{d-2}}\right)^{\frac{d-2}{d}}$$
  Di conseguenza,
$$\int_{B_r} (u-T)_+^2 \,dx \le |\Omega_T \cap B_r|^{2/d} \frac{\kappa_{\mathrm{A}}\, C_d}{(R-r)^2} \int_{B_R} (u-T)_+^2 \,dx.$$

- Consideriamo ora $t \in (0,T)$ e stimiamo il temine di misura:
$$|\Omega_T \cap B_r| = \int_{B_r \cap \Omega_T} 1\, dx \le \frac{1}{(T-t)^2} \int_{B_r \cap \Omega_T} (u-t)_+^2\, dx \le \frac{1}{(T-t)^2} \int_{B_r} (u-t)_+^2\, dx$$
- In conclusione,

(2) $$\int_{B_r} (u-T)_+^2\, dx \le \frac{\kappa_{\mathrm{A}}\, C_d}{(R-r)^2 (T-t)^{4/d}} \left(\int_{B_R} (u-t)_+^2\, dx \right)^{1+\frac{2}{d}}.$$
- Ora, possiamo scrivere la nostra stima iterativa. Per ogni $k \ge 1$ definiamo
$$R_k = \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{k+1}}\Big) R \qquad \text{e} \qquad T_k = T\Big(1 - \frac{1}{2^k}\Big).$$
In particolare,
$$T_0 = 0\ , \quad R_0 = R\ , \quad T_\infty = T\ , \quad R_\infty = \frac{R}{2}\,.$$
Ponendo
$$M_k = \int_{B_{R_k}} (u - T_k)_+^2\, dx$$
e usando (2), otteniamo
$$M_{k+1} \le \frac{\kappa_{\mathrm{A}}\, C_d}{R^2 T^{4/d}} \left(4^{1+\frac{2}{d}}\right)^k M_k^{1+\frac{2}{d}}.$$
- Il lemma di De Giorgi ora implica che se
$$M_0 = \int_{B_R} u^2\, dx \le \frac{C_d}{\kappa_{\mathrm{A}}^{d/2}} \left(R^2 T^{4/d}\right)^{d/2} = \frac{C_d}{\kappa_{\mathrm{A}}^{d/2}} R^d T^2,$$
allora
$$\int_{B_{R/2}} (u-T)_+^2\, dx = 0,$$
ovvero
$$\|u_+\|_{L^\infty(B_{R/2})}^2 \le \kappa_{\mathrm{A}}^{d/2}\, C_d \fint_{B_R} u_+^2\, dx. \quad \square$$

Corollario 7. *Se $u \in H^1(\Omega)$ è una soluzione di*
$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = 0 \quad \textit{in} \quad \Omega\ ,$$
allora u è localmente limitata in Ω.

---

4. Stima della misura degli insiemi di livello

Esercizio 8. *Sia Ω un insieme di misura finita in $\mathbb{R}^d$. Allora*
$$\int_\Omega \frac{dx}{|x|^{d-1}} \le C_d |\Omega|^{1/d},$$
dove C_d è una costante dimensionale.

Lemma 9. *Siano $B_R \subset \mathbb{R}^d$ e $u \in H^1(B_R)$. Siano $t < T$ due numeri reali. Allora,*
$$|\{u \le t\} \cap B_R|\, |\{u \ge T\} \cap B_R|^{1-\frac{1}{d}} \le \frac{C_d}{T-t} |B_R| \int_{B_R} |\nabla u|\, dx,$$
dove C_d è una costante dimensionale.

Dimostrazione. Possiamo supporre che $u \in C^1(B_R)$ (vedi Lemma 10). Sia $x_0 \in B_R \cap \{u \ge T\}$. Stimeremo il volume di $\{u \le t\}$ in B_R in termini di $|\nabla u|$. Poniamo
$$\varphi(x) := u(x - x_0)\ , \qquad \varphi : B_R(-x_0) \to \mathbb{R},$$
e osserviamo che possiamo scrivere gli insiemi $B_R(-x_0)$ e $B_R(-x_0) \cap \{\varphi \le t\}$ in coordiante polari come
$$B_R(-x_0) := \Big\{(r,\theta)\ :\ \theta \in \partial B_1, \quad r \in [0, R_\theta)\Big\},$$
$$B_R(-x_0) \cap \{\varphi \le t\} := \Big\{(r,\theta)\ :\ \theta \in \partial B_1, \quad r \in I_\theta\Big\},$$

dove per ogni θ,

$$I_\theta := \Big\{ r > 0 \ : \ r\theta \in B_r(-x_0) \cap \{\varphi \le t\} \Big\} \qquad \text{e} \qquad (0, R_\theta) = \Big\{ r > 0 \ : \ r\theta \in B_r(-x_0) \Big\}.$$

Ora, per ogni punto

$$x = r\theta \in \{\varphi \le t\},$$

abbiamo che

$$T - t \le |\varphi(x) - \varphi(0)| = |\varphi(r\theta) - \varphi(0)| \le \left| \int_0^r \theta \cdot \nabla\varphi(s\theta)\, ds \right| \le \int_0^r |\nabla\varphi|(s\theta)\, ds.$$

Integrando su $\{\varphi \le 0\}$, abbiamo che

$$\begin{aligned}
|\{u \le t\} \cap B_R| &= |\{\varphi \le t\} \cap B_R(-x_0)| \\
&= \int_{\partial B_1} \int_{I_\theta} r^{d-1}\, dr\, d\theta \\
&= \frac{1}{T-t} \int_{\partial B_1} \int_{I_\theta} r^{d-1} |\varphi(r\theta) - \varphi(0)|\, dr\, d\theta \\
&\le \frac{1}{T-t} \int_{\partial B_1} \int_{I_\theta} r^{d-1} \left(\int_0^r |\nabla\varphi|(s\theta)\, ds \right) dr\, d\theta \\
&\le \frac{1}{T-t} \int_{\partial B_1} \int_{I_\theta} r^{d-1} \left(\int_0^{R_\theta} \frac{1}{s^{d-1}} |\nabla\varphi|(s\theta) s^{d-1}\, ds \right) dr\, d\theta.
\end{aligned}$$

Siccome la misura di I_θ è minore di $2R$ e $r \le 2R$ per $r \in I_\theta$, abbiamo

$$\int_{I_\theta} r^{d-1}\, dr \le (2R)^{d-1} |I_\theta| \le 2^d R^d,$$

e quindi

$$|\{u \le t\} \cap B_R| \le \frac{C_d}{T-t} |B_R| \int_{\partial B_1} \int_0^{R_\theta} \frac{1}{s^{d-1}} |\nabla\varphi|(s\theta) s^{d-1}\, ds\, d\theta = \frac{C_d}{T-t} |B_R| \int_{B_R} \frac{|\nabla u|(x)}{|x - x_0|^{d-1}} dx.$$

Integrando nella variabile $y = x_0$ su $\{u \ge T\} \cap B_R$ otteniamo

$$\begin{aligned}
|\{u \le t\} \cap B_R|\, |\{u \ge T\} \cap B_R| &\le C_d |B_R| \int_{\{u \ge T\} \cap B_R} \int_{B_R} \frac{|\nabla u|(x)}{|x-y|^{d-1}}\, dx\, dy \\
&\le C_d |B_R| \int_{B_R} |\nabla u|(x) \left(\int_{\{u \ge T\} \cap B_R} \frac{dy}{|x-y|^{d-1}} \right) dx \\
&\le C_d |B_R|\, |\{u \ge T\} \cap B_R|^{1/d} \int_{B_R} |\nabla u|\, dx,
\end{aligned}$$

dove nell'ultima disuguaglianza abbiamo usato il risutato dell'esercizio precedente. □

Lemma 10. *Sia $B_R \subset \mathbb{R}^d$. Se per ogni coppia di numeri reali $t < T$ e per ogni funzione $\varphi \in C^1(B_R)$ vale la disuguaglianza*

$$|\{\varphi \le t\} \cap B_R|\, |\{\varphi \ge T\} \cap B_R|^{1 - \frac{1}{d}} \le \frac{C_d}{T-t} |B_R| \int_{B_R} |\nabla\varphi|\, dx,$$

allora, per ogni $u \in H^1(B_R)$ si ha

$$|\{u \le t\} \cap B_R|\, |\{u \ge T\} \cap B_R|^{1 - \frac{1}{d}} \le \frac{C_d}{T-t} |B_R| \int_{B_R} |\nabla u|\, dx,$$

dove C_d è una costante dimensionale.

Dimostrazione. Sia φ_n una successione di funzioni C^1 che converge a u fortemente in $H^1(B_R)$ e puntualmente quasi-ovunque in B_R. Fissato $\varepsilon > 0$ abbiamo che

$$\begin{aligned}
|\{\varphi_n < t + \varepsilon\} \cap B_R|\, |\{\varphi_n > T - \varepsilon\} \cap B_R|^{1 - \frac{1}{d}} &\le |\{\varphi_n \le t + \varepsilon\} \cap B_R|\, |\{\varphi_n \ge T - \varepsilon\} \cap B_R|^{1 - \frac{1}{d}} \\
&\le \frac{C_d}{T - t - 2\varepsilon} |B_R| \int_{B_R} |\nabla\varphi_n|\, dx,
\end{aligned}$$

Siccome, φ_n converge puntualmente a u, abbiamo che

$$\mathbb{1}_{\{u > t+\varepsilon\}} \le \liminf_{n\to\infty} \mathbb{1}_{\{\varphi_n > t+\varepsilon\}} \qquad \text{e} \qquad \mathbb{1}_{\{u < T-\varepsilon\}} \le \liminf_{n\to\infty} \mathbb{1}_{\{\varphi_n < T-\varepsilon\}}.$$

Di conseguenza,

$$|\{u<t+\varepsilon\}\cap B_R|\,|\{u>T-\varepsilon\}\cap B_R|^{1-\frac{1}{d}}\le \frac{C_d}{T-t-2\varepsilon}|B_R|\int_{B_R}|\nabla u|\,dx.$$

Ora, per il lemma di Fatou,

$$|\{u\le t\}\cap B_R|=\lim_{\varepsilon\to 0}|\{\varphi_n<t+\varepsilon\}\cap B_R|\qquad \text{e}\qquad |\{u\ge T\}\cap B_R|=\lim_{\varepsilon\to 0}|\{\varphi_n>T-\varepsilon\}\cap B_R|,$$

e quindi, passando al limite per $\varepsilon\to 0$, abbiamo la tesi. □

Come corollario, otteniamo la stima che useremo nella sezione successiva per completare la dimostrazione del teorema di De Giorgi è la seguente.

Proposizione 11. *Siano $B_R\subset\mathbb{R}^d$, $u\in H^1(B_R)$ e $t>T$ due numeri reali. Allora*

$$|\{u\le t\}\cap B_R|\,|\{u\ge T\}\cap B_R|^{1-1/d}\le C_d|B_R|\,|\{t<u<T\}\cap B_R|^{1/2}\left(\int_{B_R}|\nabla(u-t)_+|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

In particolare, se

$$\frac{|\{u\le t\}\cap B_R|}{|B_R|}\ge\frac{1}{2},$$

allora

$$|\{u\ge T\}\cap B_R|^{1-1/d}\le C_d\,|\{t<u<T\}\cap B_R|^{1/2}\,\frac{1}{T-t}\left(\int_{B_R}|\nabla(u-t)_+|^2\,dx\right)^{1/2},$$

dove C_d è una costante dimensionale.

Dimostrazione. Applicando il lemma precedente alla funzione $v:=T\wedge(u-t)_+$, abbiamo

$$|\{u\le t\}\cap B_R|\,|\{u\ge T\}\cap B_R|^{1-\frac{1}{d}}=|\{v\le 0\}\cap B_R|\,|\{v\ge T-t\}\cap B_R|^{1-\frac{1}{d}}\le\frac{C_d}{T-t}|B_R|\int_{B_R}|\nabla v|\,dx.$$

Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz

$$\int_{B_R}|\nabla v|\,dx\le|\{|\nabla v|\neq 0\}\cap B_R|^{1/2}\left(\int_{B_R}|\nabla v|^2\,dx\right)^{1/2}\le|\{t<u<T\}\cap B_R|^{1/2}\left(\int_{B_R}|\nabla(u-t)_+|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

□

---

5. Controllo dell'oscillazione

Lemma 12. *Sia $u\in H^1(B_{2R})$ una soluzione di*

$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big)=0\quad in\quad B_{2R}\ ,$$

dove la matrice A è tale che:

$$c_A\,\mathrm{Id}\le A(x)\le C_A\,\mathrm{Id}\quad per\ ogni\quad x\in B_{2R}\,.$$

Esiste una costante $\eta\in(0,1)$ tale che, se

$$\operatorname*{osc}_{B_{2R}}u\le 2,$$

allora

$$\operatorname*{osc}_{B_{R/2}}u\le 2-\eta.$$

Dimostrazione. Possiamo supporre che

$$\max_{B_{2R}}u\le 1\qquad\text{e}\qquad\min_{B_{2R}}u\ge -1.$$

Osserviamo che ci sono due casi:

$$\frac{|\{u<0\}\cap B_R|}{|B_R|}\le\frac{1}{2}\qquad\text{oppure}\qquad\frac{|\{u>0\}\cap B_R|}{|B_R|}\le\frac{1}{2}.$$

Supponiamo di avere

$$\frac{|\{u>0\}\cap B_R|}{|B_R|}\le\frac{1}{2}.$$

Mostreremo che esiste una costante $\eta > 0$ tale che

$$u \leq 1 - \eta \quad \text{in} \quad B_{R/2}. \tag{3}$$

Consideriamo la successione

$$T_k := 1 - \frac{1}{2^{k+1}} \qquad \text{e} \qquad M_k := \big|\{u > T_k\} \cap B_R\big|.$$

Osserviamo che la successione M_k è decrescente. Inoltre, per Proposizione 11 abbiamo la stima

$$M_{k+1}^{2-\frac{2}{d}} \leq C_d(M_k - M_{k+1})4^k \int_{B_R} |\nabla(u - T_k)_+|^2\,dx \qquad \text{per ogni} \qquad k \geq 0. \tag{4}$$

Step 1. Mostreremo che il termine

$$4^k \int_{B_R} |\nabla(u - T_k)_+|^2\,dx$$

si può stimare con una costante che non dipende da k. Infatti, per la disuguaglianza di Caccioppoli abbiamo

$$\int_{B_R} |\nabla(u - T_k)_+|^2\,dx \leq \frac{C_{\mathrm{A}}}{c_{\mathrm{A}}} \frac{C_d}{R^2} \int_{B_{2R}} (u - T_k)_+^2\,dx$$

e siccome

$$(u - T_k)_+ \leq 1 - T_k \qquad \text{su} \qquad B_{2R},$$

otteniamo che

$$\int_{B_R} |\nabla(u - T_k)_+|^2\,dx \leq \frac{C_{\mathrm{A}}}{c_{\mathrm{A}}} \frac{C_d}{R^2} 4^{-k} |B_{2R}|.$$

e quindi

$$4^k \int_{B_R} |\nabla(u - T_k)_+|^2\,dx \leq \frac{C_{\mathrm{A}}}{c_{\mathrm{A}}} \frac{C_d}{R^2} |B_{2R}|.$$

Sostituendo in (4), otteniamo

$$M_{k+1}^{2-\frac{2}{d}} \leq \frac{C_{\mathrm{A}}}{c_{\mathrm{A}}} C_d R^{d-2}(M_k - M_{k+1}) \qquad \text{per ogni} \qquad k \geq 0\,.$$

Step 2. Sommando queste disuguaglianze per $k = 0, \dots, N-1$, otteniamo

$$N M_N^{2-\frac{2}{d}} \leq \sum_{k=0}^{N-1} M_{k+1}^{2-\frac{2}{d}} \leq \frac{C_{\mathrm{A}}}{c_{\mathrm{A}}} C_d R^{d-2} \sum_{k=0}^{N-1} \big(M_k - M_{k+1}\big) \leq \frac{C_{\mathrm{A}}}{c_{\mathrm{A}}} C_d R^{d-2} M_0 \leq \frac{C_{\mathrm{A}}}{c_{\mathrm{A}}} C_d R^{2d-2},$$

ovvero

$$M_N^{\frac{2d-2}{d}} \leq \frac{C_{\mathrm{A}}}{c_{\mathrm{A}}} \frac{C_d}{N} R^{2d-2}$$

che possiamo scrivere anche come

$$M_N \leq C_d \left(\frac{C_{\mathrm{A}}}{c_{\mathrm{A}}} \frac{1}{N}\right)^{\frac{d}{2d-2}} |B_R|.$$

Conclusione. Infine, dalla stima $L^2 - L^\infty$ si ottiene che

$$\|(u - T_N)_+\|_{L^\infty(B_{R/2})}^2 \leq \left(\frac{C_{\mathrm{A}}}{c_{\mathrm{A}}}\right)^{\frac{d}{2}} \frac{C_d}{|B_R|} \int_{B_R} (u - T_N)_+^2\,dx \leq \left(\frac{C_{\mathrm{A}}}{c_{\mathrm{A}}}\right)^{\frac{d}{2}} C_d \left(\frac{C_{\mathrm{A}}}{c_{\mathrm{A}}} \frac{1}{N}\right)^{\frac{d}{2d-2}} (1 - T_N)^2\,.$$

Ora, poniamo

$$\varepsilon^2 := C_d \left(\frac{C_{\mathrm{A}}}{c_{\mathrm{A}}}\right)^{\frac{1}{2(d-1)}} \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{d}{2d-2}}.$$

e osserviamo che scegliendo N abbastanza grande (in funzione di $\frac{C_{\mathrm{A}}}{c_{\mathrm{A}}}$ e la dimensione d), abbiamo

$$0 < \varepsilon < 1.$$

Ora, calcoliamo

$$\begin{aligned}
\|u_+\|_{L^\infty(B_{R/2})} &\leq T_N + \|(u - T_N)_+\|_{L^\infty(B_{R/2})} \\
&\leq T_N + \varepsilon(1 - T_N) \\
&= 1 - (1 - \varepsilon)(1 - T_N),
\end{aligned}$$

che conclude la dimostrazione di (3) prendendo

$$\eta = (1-\varepsilon)(1-T_N).$$

Osserviamo che η è una costante che dipende solo dalla dimensione d e del rapporto $\dfrac{C_{\mathrm{A}}}{c_{\mathrm{A}}}$. $\square$

Bibliografia

Ci sono numerose variazioni sul Teorema di De Giorgi. Ecco qualche testo di riferimento:

[ACM] L. Ambrosio, A. Carlotto, A. Massaccesi. *Lectures on Elliptic Partial Differential Equations.* SNS (2018).
[HL] Q.H. Han, F.H. Lin. *Elliptic Partial Differential Equations.* Courant Lecture Notes (2011).
[J] J. Jost. *Partial differential equations.* Springer-Verlag New York (2002).

La presente nota è basata sulla seguente lezione di L. Caffarelli:
`https://www.youtube.com/watch?v=aorOJnAoKuI`