Regolarità Hölder interna via la proprietà della media

Lemma 1. *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$, $f \in L^p(\Omega)$ per un qualche $p \geq d/2$ ed $u \in H^1(\Omega)$ una soluzione debole di*

$$-\Delta u = f \quad \text{in} \quad \Omega\,.$$

Allora, la funzione u è definita puntualmente ovunque in Ω come

$$u(x_0) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x_0)} u(x)\,dx \qquad \text{per ogni} \qquad x_0 \in \Omega\,.$$

Inoltre, esiste una costante dimensionale C_d tale che

$$\left|\fint_{B_r(x_0)} u - u(0)\right| \leq \frac{p\,C_d}{2p-d}\|f\|_{L^p(\Omega)} r^{2-d/p},$$

per ogni $x_0 \in \Omega$ ed ogni $r > 0$ tale che $\overline{B}_r(x_0) \subset \Omega$.

Lemma 2. *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ ed $u \in H^1(\Omega)$ una funzione nonnegativa e limitata in Ω*

$$0 \leq u \leq M \quad \text{in} \quad \Omega\,,$$

definita puntualmente ovunque in Ω come

$$u(x_0) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x_0)} u(x)\,dx \qquad \text{per ogni} \qquad x_0 \in \Omega\,.$$

Supponiamo che esistono due costanti $A > 0$ ed $\alpha \in (0, 1]$ tali che

$$\left|\fint_{B_r(x_0)} u - u(0)\right| \leq A r^\alpha,$$

per ogni $x_0 \in \Omega$ ed ogni $r > 0$ tale che $\overline{B}_r(x_0) \subset \Omega$.

Allora, per ogni $\delta > 0$ esiste una costante $\varepsilon > 0$ tale che

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^\beta \quad \text{per ogni} \quad x, y \in \Omega_\delta \quad \text{tali che} \quad |x-y| \leq \varepsilon,$$

dove

$$\Omega_\delta := \Big\{x \in \Omega \;:\; dist(x, \partial\Omega) > \delta\Big\},$$

$$\beta = \frac{\alpha}{\alpha+1}$$

e la costante C è data da

$$C = C_d M + 4A,$$

dove C_d è una costante dimensionale.

Dimostrazione. Siano $x, y \in \Omega_\delta$ due punti a distanza

$$|x-y| \leq \varepsilon,$$

dove ε sarà scelto in seguito. Usando il lemma precedente calcoliamo

$$\begin{aligned} u(x) - u(y) &\leq \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x)} u + A\,r^\alpha - u(y) \\ &\leq \frac{R^d}{r^d}\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(y)} u + A\,r^\alpha - u(y), \end{aligned}$$

dove

$$R := r + |x-y| \leq r + \varepsilon,$$

e dove r ed ε saranno scelti in modo tale che

$$r + \varepsilon < \delta,$$

il che assicura l'inclusione

$$B_r(x) \subset B_R(y) \subset \Omega.$$

Ora, riscriviamo la disuguaglianza di sopra come

$$\begin{aligned}
u(x)-u(y) &\le \frac{R^d-r^d}{r^d}\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(y)} u + A\,r^\alpha - u(y) + \frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(y)} u \\
&\le \frac{R^d-r^d}{r^d}\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(y)} u + A\,r^\alpha + A\,R^\alpha \\
&\le \frac{R^d-r^d}{r^d}\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(y)} u + 2A\,R^\alpha \\
&\le \frac{(R-r)\,dR^{d-1}}{r^d}\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(y)} u + 2A\,R^\alpha \\
&= \frac{|x-y|}{r}\frac{dR^{d-1}}{r^{d-1}}\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(y)} u + 2A\,R^\alpha \\
&\le \frac{|x-y|}{r}\frac{dR^{d-1}}{r^{d-1}}M + 2A\,R^\alpha.
\end{aligned}$$

Scegliendo

$$r := |x-y|^\sigma \qquad \text{con} \qquad \sigma\in(0,1),$$

otteniamo $R = r + |x-y| \le 2r$ e

$$\begin{aligned}
u(x)-u(y) &\le \frac{|x-y|}{|x-y|^\sigma} d2^{d-1}M + 2A\,2^\alpha |x-y|^{\sigma\alpha} \\
&\le |x-y|^{1-\sigma} d2^{d-1}M + 4A\,|x-y|^{\sigma\alpha}.
\end{aligned}$$

Scegliamo ora σ in modo tale che

$$1-\sigma = \sigma\alpha,$$

ovvero

$$\sigma := \frac{1}{1+\alpha}.$$

Si ha quindi,

$$u(x)-u(y) \le \Big(d2^{d-1}M + 4A\Big)|x-y|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Infine, osserviamo che possiamo scegliere ε in modo tale da avere

$$\delta \ge 2\varepsilon^\sigma > \varepsilon + \varepsilon^\sigma > |x-y|^\sigma + |x-y| = r + |x-y|,$$

ovvero basta prendere

$$\varepsilon := \left({}^{\delta}\!/_{2}\right)^{1+\alpha}.$$

□

Come corollario otteniamo la seguente proposizione.

Proposizione 3. *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e sia $u \in H^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ una soluzione debole di*

$$-\Delta u = f \quad \textit{in} \quad \Omega\,,$$

dove $f \in L^p(\Omega)$ per un qualche $p > {}^{d}\!/_{2}$. Allora, esiste una costante dimensionale C_d tale che

$$|u(x)-u(y)| \le C_d\left(\operatorname*{osc}_{\Omega} u + \frac{p\,\|f\|_{L^p(B_1)}}{2p-d}\right)|x-y|^\alpha,$$

per ogni $x, y \in \Omega_\delta := \Big\{x\in\Omega \ : \ dist(x,\partial\Omega) > \delta\Big\}$ tali che $|x-y| \le \left({}^{\delta}\!/_{2}\right)^{\frac{3p-d}{p}}$, dove $\alpha := \frac{2p-d}{3p-d}$.