Soluzioni deboli del problema di Poisson

Soluzioni deboli e formulazione variazionale

Definizione 1 (Soluzioni deboli)**.** *Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$ e sia $f \in L^2(\Omega)$. Diciamo che la funzione $u \in H^1_0(\Omega)$ è soluzione debole di*

$$-\Delta u = f \quad in \quad \Omega\ , \qquad u \in H^1_0(\Omega),$$

se

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f(x)\varphi \, dx \qquad per\ ogni \qquad \varphi \in H^1_0(\Omega).$$

Proposizione 2 (Formulazione variazionale)**.** *Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$ e sia $f \in L^2(\Omega)$. Data una funzione $u \in H^1_0(\Omega)$ sono equivalenti:*

(1) *u è soluzione debole di*

$$-\Delta u = f \quad in \quad \Omega\ , \qquad u \in H^1_0(\Omega);$$

(2) *per ogni $v \in H^1_0(\Omega)$ si ha*

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \int_\Omega uf \, dx \le \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx - \int_\Omega vf \, dx.$$

Dimostrazione. Dimostriamo prima che (1) implica (2). Sia $v \in H^1_0(\Omega)$ una funzione qualsiasi. Poniamo $\varphi = v - u$. Di conseguenza,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx - \int_\Omega vf \, dx &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla (u+\varphi)|^2 \, dx - \int_\Omega (u+\varphi)f \, dx \\
&= \left(\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \int_\Omega uf \, dx\right) + \int_\Omega |\nabla \varphi|^2 \, dx + \left(\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_\Omega \varphi f \, dx\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \int_\Omega uf \, dx\right) + \int_\Omega |\nabla \varphi|^2 \, dx \\
&\ge \left(\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \int_\Omega uf \, dx\right).
\end{aligned}$$

dove, abbiamo usato che siccome u è soluzione debole e $\varphi \in H^1_0(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_\Omega \varphi f \, dx = 0.$$

Dimostriamo ora che (2) implica (1). Fissiamo una funzione $\varphi \in H^1_0(\Omega)$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$ consideriamo il competitore $v_t := u + t\varphi$. Allora,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \int_\Omega uf \, dx &\le \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_t|^2 \, dx - \int_\Omega v_t f \, dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla (u+t\varphi)|^2 \, dx - \int_\Omega (u+t\varphi)f \, dx \\
&= \left(\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \int_\Omega uf \, dx\right) + \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla \varphi|^2 \, dx + t\left(\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_\Omega \varphi f \, dx\right).
\end{aligned}$$

Siccome la disuguaglianza deve essere vera per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha che

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_\Omega \varphi f \, dx = 0.$$

□

Esistenza e unicità delle soluzioni

Per dimostrare l'esistenza e l'unicità di una soluzione useremo la disuguaglianza di Poincaré.

Teorema 3 (Disuguaglianza di Poincaré)**.** *Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$.*
Allora esiste una costante $C_\Omega > 0$ tale che

$$\int_\Omega \varphi^2(x) \, dx \le C_\Omega \int_\Omega |\nabla \varphi|^2 \, dx \quad per\ ogni \quad \varphi \in H^1_0(\Omega).$$

Proposizione 4 (Unicità della soluzione)**.** *Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$ e sia $f \in L^2(\Omega)$. Siano $u \in H^1_0(\Omega)$ e $v \in H^1_0(\Omega)$ due soluzioni deboli di*

$$-\Delta u = f \quad in \quad \Omega\ , \qquad u \in H^1_0(\Omega).$$

Allora $u = v$.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla(u-v)|^2\,dx &= \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla(u-v)\,dx - \int_\Omega \nabla v\cdot\nabla(u-v)\,dx\\ &= \int_\Omega f(u-v)\,dx - \int_\Omega f(u-v)\,dx = 0.\end{aligned}$$

Per la disuguaglianza di Poincaré, abbiamo che anche

$$\int_\Omega (u-v)^2\,dx = 0,$$

e quindi $u = v$ in Ω. □

Proposizione 5 (Esistenza di una soluzione)**.** *Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$ e sia $f \in L^2(\Omega)$. Allora esiste una soluzione debole $u \in H^1_0(\Omega)$ del problema*

$$-\Delta u = f \quad in \quad \Omega\ , \qquad u \in H^1_0(\Omega).$$

Dimostrazione. Per ogni funzione $\varphi \in H^1_0(\Omega)$, definiamo

$$J(\varphi) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\,dx - \int_\Omega f(x)\varphi\,dx\,.$$

Consideriamo anche

$$I := \inf\Big\{J(\varphi)\ :\ \varphi \in H^1_0(\Omega)\Big\}.$$

Osserviamo che $I \le 0$. Infatti, siccome la costante 0 è nello spazio $H^1_0(\Omega)$, si ha che

$$I \le J(0) = 0.$$

Sia ora $u_n \in H^1_0(\Omega)$ una successione di funzioni in $H^1_0(\Omega)$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} J(u_n) = I.$$

Possiamo supporre che

$$J(u_n) \le 0 \quad \text{per ogni} \quad n \ge 1.$$

In particolare,

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2\,dx \le 2\int_\Omega f u_n\,dx \le 2\|f\|_{L^2(\Omega)}\|u_n\|_{L^2(\Omega)}.$$

Per la disuguaglianza di Poincaré, abbiamo

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2\,dx \le 2\|f\|_{L^2(\Omega)}\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \le 2C_\Omega\|f\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}$$

e quindi

$$\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)} \le 2C_\Omega\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Applicando di nuovo Poincaré,

$$\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \le C_\Omega\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)} \le 2C_\Omega^2\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Quindi, la successione u_n è limitata in $H^1_0(\Omega)$. Di conseguenza, esiste una sottosuccessione u_{n_k} che converge debolmente in $H^1_0(\Omega)$ ad una certa funzione $u \in H^1_0(\Omega)$. Per le proprietà della convergenza debole,

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \le \liminf_{k\to\infty}\int_\Omega |\nabla u_{n_k}|^2\,dx \qquad \text{e} \qquad \int_\Omega uf\,dx = \lim_{k\to\infty}\int_\Omega f u_{n_k}\,dx\,,$$

e quindi,

$$J(u) \le \lim_{k\to\infty} J(u_{n_k}) = I.$$

Abbiamo quindi dimostrato che

$$J(u) = \min\Big\{J(\varphi)\ :\ \varphi \in H^1_0(\Omega)\Big\}.$$

□