Calcolo delle Variazioni A - Domande per l'esame

Per tutte le domande, potete usare liberamente le varie proprietà delle funzioni di Sobolev. Per esempio che se u è Sobolev, allora anche u_+, u_-, $|u|$, $(u-t)_+$, $u \wedge t$ sono Sobolev; anche i vari teoremi di approssimazione, per esempio che una funzione $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ può essere approssimata con funzioni C^∞ della forma $\phi_\varepsilon * u$.

Alla fine di ogni domanda sono indicate le dispense da consultare.

All'esame vi sarà proposto uno dei seguenti argomenti:

- *De Giorgi (potete scegliere tra Domanda 1 e Domanda 3);*
- *Schauder (potete scegliere tra Domanda 4 e Domanda 5);*
- *Formula della media, stima del gradiente, principio del massimo (potete scegliere tra Domanda 2 e Domanda 6);*
- *Comportamento al bordo (potete scegliere tra Domanda 7 e Domanda 8).*

---

1. Limitatezza delle soluzioni

Teorema. *Sia Ω un aperto di misura finita in $\mathbb{R}^d$ e sia $f \in L^p(\Omega)$, dove $p > \frac{d}{2}$. Allora la soluzione debole $u \in H^1_0(\Omega)$ di*

$$-\Delta u = f \quad \text{in} \quad \Omega\ , \qquad u \in H^1_0(\Omega).$$

è limitata e si ha la stima

$$\|u\|_{L^\infty} \le C_{d,p}\|f\|_{L^p}|\Omega|^{\frac{2p-d}{pd}}.$$

Teorema. *Sia Ω un aperto di misura finita in $\mathbb{R}^d$ e sia $u \in H^1_0(\Omega)$ una soluzione di*

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{in} \quad \Omega\ , \qquad u \in H^1_0(\Omega)\ , \qquad \int_\Omega u^2\,dx = 1.$$

Allora, $u \in L^\infty$ e si ha la stima

$$\|u\|_{L^\infty} \le C_d \lambda^{d/4},$$

dove C_d è una costante dimensionale.

Dispense: Capitolo 1. Parte 2,3.

2. Regolarità Hölder fino al bordo ed un'applicazione

Teorema. *Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$ che ha la stima di densita esterna, ovvero supponiamo che*

$$\begin{aligned}&\textit{esistono due costanti } r_0 > 0 \textit{ e } c \in (0,1) \textit{ tali che}\\ &\qquad \textit{per ogni } x \in \partial\Omega \textit{ e per ogni } r \in (0,r_0) \textit{ si ha la stima}\\ &\qquad\qquad \big|B_r(x) \cap \Omega\big| \le (1-c)|B_r|.\end{aligned}$$

Siano $f \in L^p(\Omega)$ con $p > \frac{d}{2}$ ed $u \in H_0^1(\Omega)$ la soluzione debole di

$$-\Delta u = f \quad \textit{in} \quad \Omega\,, \qquad u \in H_0^1(\Omega)\,.$$

Allora, $u \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d)$.

Teorema. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ che soddisfa la stima di densità esterna, ovvero tale che*

$$\begin{aligned}&\textit{Esistono due costanti } r_0 > 0 \textit{ e } c \in (0,1) \textit{ tali che}\\ &\qquad \textit{per ogni } x \in \partial\Omega \textit{ e per ogni } r \in (0,r_0) \textit{ si ha la stima}\\ &\qquad\qquad \big|B_r(x) \cap \Omega\big| \le (1-c)|B_r|.\end{aligned}$$

Allora

$$H_0^1(\Omega) = \Big\{u \in H^1(\mathbb{R}^d) \ :\ u = 0 \ \textit{ Lebesgue quasi-ovunque su } \ \mathbb{R}^d \setminus \Omega\Big\}.$$

Dispense: Capitolo 1. Parte 4,5,6,7.

3. Teorema di De Giorgi

Teorema. *Sia* $u \in H^1(B_{2R})$ *una soluzione di*

$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = 0 \quad \textit{in} \quad B_{2R}\ ,$$

dove la matrice (simmetrica, a coefficienti Lebesgue misurabili) A è tale che:

$$c_A\,\mathrm{Id} \le A(x) \le C_A\,\mathrm{Id} \quad \textit{per ogni} \quad x \in B_{2R}\,.$$

Esiste una costante $\eta \in (0,1)$ tale che, se

$$\operatorname*{osc}_{B_{2R}} u \le 2,$$

allora

$$\operatorname*{osc}_{B_{R/2}} u \le 2 - \eta.$$

In particolare, le soluzioni u di

$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = 0 \quad \textit{in} \quad B_{2R}\ ,$$

sono funzioni Hölder continue in B_{2R}.

Dispense: Capitolo 1. Parte 8.

4. Teorema di Schauder – continuità Lipschitz delle soluzioni

Teorema. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Sia $u \in H^1(\Omega)$ una soluzione di*

$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = f + \mathrm{div}\, F \quad \textit{in} \quad \Omega,$$

dove:

- *A è una matrice simmetrica, uniformemente ellittica e uniformemente limitata su Ω, con coefficienti Hölder.*
- *$f \in L^p(\Omega)$ per un qualche $p > d$.*
- *$F \in C^{0,\alpha}(\Omega; \mathbb{R}^d)$, per un qualche $\alpha > 0$.*

Allora, $u \in C^{0,1}(\Omega)$.

Dispense: Capitolo 2. Parte 1,2.

5. Teorema di Schauder – regolarità $C^{1,\alpha}$ delle soluzioni

Teorema. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Sia $u \in C^{0,1}(\Omega)$ una funzione lipschitziana ed una soluzione di*

$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = f + \mathrm{div}\, F \quad \textit{in} \quad \Omega,$$

dove:

- *A è una matrice simmetrica, uniformemente ellittica e uniformemente limitata su Ω, con coefficienti Hölder.*
- *$f \in L^p(\Omega)$ per un qualche $p > d$.*
- *$F \in C^{0,\alpha}(\Omega; \mathbb{R}^d)$, per un qualche $\alpha > 0$.*

Allora, esiste $\alpha > 0$ tale che $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$.

Osservazione. *Per dimostrare la differenziabilità in zero, potete usare che $u(0) = 0$, $A(0) = Id$ e che u soddisfa la seguente condizione di quasi-minimalità*

$$\fint_{B_r} |\nabla(u - h)|^2\, dx \le C r^{\alpha}\,,$$

dove h è l'estensione armonica di u in B_r.

Osservazione. *Potete scegliere quale delle dimostrazioni fare: la dimostrazione di Capitolo2.Parte4-5 oppure la dimostrazione con la disuguaglianza epiperimetrica Capitolo2.Parte7-8-9 (nel secondo caso potete dare per buoni i risultati riguardanti gli spazi di Sobolev sulla sfera; potrebbe an che essere utile l'enunciato della formula di Weiss che riporto qui sotto).*

Lemma (Formula di Weiss)**.** *Se $u \in H^1(B_R)$, allora*

$$\frac{\partial}{\partial r} W(u_r, 1) = \frac{d}{r}\big(W(z_r, 1) - W(u_r, 1)\big) + \frac{1}{r}\int_{\partial B_1} |x \cdot \nabla u_r - u_r|^2\, d\mathcal{H}^{d-1},$$

dove

$$W(u, R) = \frac{1}{R^d}\int_{B_R} |\nabla u|^2\, dx - \frac{1}{R^{d+1}}\int_{\partial B_R} u^2\,, \qquad u_r(x) := \frac{u(rx)}{r} \qquad e \qquad z_r(x) := |x| u_r\left(\frac{x}{|x|}\right).$$

Dispense: Capitolo 2. Parte 2B, 3, 4, 5.

oppure

Dispense: Capitolo 2. Parte 2B, 3, 7, 8, 9.

6. Regolarità fino al bordo delle funzioni armoniche

Teorema. *Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$. Sia*

$$g : \partial\Omega \to \mathbb{R},$$

una funzione che soddisfa la bounded slope condition con costante $S > 0$ e sia $h \in H^1(\Omega)$ la soluzione di

$$\Delta h = 0 \quad in \quad \Omega \ , \qquad h = g \quad su \quad \partial\Omega.$$

Allora,

$$|\nabla h| \leq C_d S \qquad su \qquad \Omega,$$

dove C_d è una costante dimensionale. In particolare, $h : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ è Lipschitziana.

Teorema. *Sia Ω un rettangolo in $\mathbb{R}^2$. Esiste una funzione lipchitziana*

$$g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$$

tale per cui la soluzione h di

$$\Delta h = 0 \quad in \quad \Omega \ , \qquad h = g \quad su \quad \partial\Omega,$$

è continua (hölderiana), ma non lipschitziana fino al bordo di Ω.

Dispense: Capitolo 1. Parte 9, 10, 10A, 10B; Capitolo 2. Parte 2B, 2C.

7. Teorema di Serrin

Teorema (Serrin)**.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto limitato con frontiera di classe C^2 e sia $w : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ la soluzione di*

$$-\Delta w = 1 \quad in \quad \Omega, \qquad w = 0 \quad su \quad \partial\Omega\,.$$

Se $w \in C^2(\overline{\Omega})$ ed esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$|\nabla w| = c \quad su \quad \partial\Omega,$$

allora Ω è una palla: $\Omega = B_r(x_0)$ per qualche $x_0 \in \mathbb{R}^d$ e $r > 0$.

$$w(x) = \frac{1}{2d}\big(r^2 - |x - x_0|^2\big) \qquad per\ ogni \qquad x \in B_r(x_0).$$

Dispense: Capitolo 3. Parte 1.

8. Disuguaglianza di Harnack al bordo

Notazioni. Sia $L > 0$ una costante fissata. Sia $B'_r \subset \mathbb{R}^{d-1}$ una palla di raggio r e centro zero in $\mathbb{R}^{d-1}$. Date due funzioni

$$g, h : B'_r \to \mathbb{R}\ , \quad g < h \quad \text{su} \quad B'_r\ ,$$

definiamo il dominio normale $\Omega(g, h; B'_r)$ come

$$\Omega(g, h; B'_r) := \Big\{(x', x_d) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}\ :\ x' \in B'_r\ ;\ \ g(x') < x_d < h(x')\Big\}.$$

Definiamo inoltre il grafico

$$\Gamma(g; B'_r) := \Big\{(x', x_d) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}\ :\ x' \in B'_r\ ;\ \ x_d = g(x')\Big\}.$$

Teorema. *Sia $g : B'_1 \to \mathbb{R}$ una funzione L-Lipschitziana e tale che $g(0) = 0$. Siano*

$$u, v : \Omega(g, g+1; B'_1) \cup \Gamma(g; B'_1) \to \mathbb{R}$$

due funzioni continue e tali che

$$\Delta u = 0 \quad e \quad u > 0 \quad in \quad \Omega(g, g+1; B'_1)\ , \qquad u = 0 \quad su \quad \Gamma(g; B'_1),$$
$$\Delta v = 0 \quad e \quad v > 0 \quad in \quad \Omega(g, g+1; B'_1)\ , \qquad v = 0 \quad su \quad \Gamma(g; B'_1).$$

Se

$$u(0, 1/2) = v(0, 1/2),$$

allora esiste una costante $M > 0$ che dipende solo dalla dimensione d e la costante L tale che

$$\frac{1}{M} v \le u \le M v \qquad in \qquad \Omega\big(g, g + \frac{1}{2}; B'_{1/2}\big)\ .$$

Dispense: Capitolo 3. Parte 3.