Lo spazio $W^{1,p}(\Omega)$

$W^{1,p}(\Omega)$ è uno spazio vettoriale

Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$. Date due funzioni $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$, e due numeri reali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, abbiamo che

$$\alpha u + \beta v \in W^{1,p}(\Omega) \qquad \text{e} \qquad \nabla(\alpha u + \beta v) = \alpha \nabla u + \beta \nabla v\,.$$

Siccome $\alpha \nabla u + \beta \nabla v \in L^p(I)$, abbiamo che

$$\alpha u + \beta v \in L^p(\Omega).$$

Quindi, basta verificare che per ogni campo vettoriale $\Phi \in C^1_c(\Omega; \mathbb{R}^d)$ si ha:

$$\begin{aligned}\int_I \Big(\alpha u + \beta v\Big) \operatorname{div} \Phi \, dx &= \alpha \int_I u \operatorname{div} \Phi \, dx + \beta \int_I v \operatorname{div} \Phi \, dx \\ &= -\alpha \int_I \nabla u \cdot \Phi \, dx - \beta \int_I \nabla u \cdot \Phi \, dx \\ &= -\int_I (\alpha \nabla u + \beta \nabla v) \cdot \Phi \, dx.\end{aligned}$$

La norma su $W^{1,p}(\Omega)$

Per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ definiamo

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{j=1}^{d} \|\partial_j u\|_{L^p(\Omega)}.$$

È immediato verificare che se $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$, allora $u \equiv 0$ e che

$$\|\alpha u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = |\alpha|\, \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \qquad \text{per ogni} \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Inoltre, $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ soddisfa la disuguaglianza triangolare

$$\begin{aligned}\|u+v\|_{W^{1,p}(\Omega)} &= \|u+v\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{j=1}^{d} \|\partial_j u + \partial_j v\|_{L^p(\Omega)} \\ &\le \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{j=1}^{d} \Big(\|\partial_j u\|_{L^p(\Omega)} + \|\partial_j v\|_{L^p(\Omega)}\Big) \\ &= \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{j=1}^{d} \|\partial_j u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{j=1}^{d} \|\partial_j v\|_{L^p(\Omega)} \\ &= \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Quindi, $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ è una norma su $W^{1,p}(\Omega)$ per ogni $p \in [1, +\infty]$.

$W^{1,p}(\Omega)$ è uno spazio di Banach

Dimostriamo che lo spazio normato $\Big(W^{1,p}(\Omega)\,,\,\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}\Big)$ è uno spazio di Banach. Sia $u_n \in W^{1,p}(\Omega)$ una successione di Cauchy. Siccome

$$\|u_n - u_m\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u_n - u_m\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{j=1}^{d} \|\partial_j u_n - \partial_j u_m\|_{L^p(\Omega)},$$

abbiamo che le successioni

$$u_n \in L^p(\Omega) \qquad \text{e} \qquad \partial_j u_n \in L^p(\Omega)\ , \quad j = 1, \dots, n\,,$$

sono di Cauchy in $L^p(\Omega)$. Siccome, lo spazio $L^p(\Omega)$ è completo, esistono i limiti forti in $L^p(\Omega)$:

$$u := \lim_{n\to+\infty} u_n \qquad \text{e} \qquad v_j := \lim_{n\to+\infty} \partial_j u_n\,.$$

Rimane da dimostrare che

$$V = (v_1, v_2, \dots, v_d)$$

sia il gradiente debole di u. Data un campo vettoriale $\Phi \in C^1_c(\Omega : \mathbb{R}^d)$, abbiamo:

$$\begin{aligned}\int_\Omega u(x)\,\mathrm{div}\,\Phi(x)\,dx &= \lim_{n\to+\infty}\int_\Omega u_n(x)\,\mathrm{div}\,\Phi(x)\,dx\\ &= -\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega \nabla u_n(x)\cdot\Phi(x)\,dx = -\int_\Omega V(x)\cdot\Phi(x)\,dx.\end{aligned} \qquad \square$$

$H^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert

Per ogni $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$ definiamo:

$$< u, v > := \int_\Omega u(x)v(x)\,dx + \int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\,dx.$$

Allora,

$$< \cdot, \cdot >: W^{1,2}(\Omega) \times W^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$$

è una forma bilineare simmetrica e definita positiva su $W^{1,2}(\Omega)$. La norma associata è:

$$< u, u >^{1/2} = \left(\int_\Omega u^2(x)\,dx + \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx\right)^{1/2},$$

ed è equivalente alla norma

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=1}^{d} \|\partial_j u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Il prodotto scalare $< \cdot, \cdot >$ rende lo spazio $W^{1,2}(\Omega)$ uno spazio di Hilbert.

$W^{1,p}(\Omega)$ COME SOTTOSPAZIO DI $\Big(L^p(\Omega)\Big)^{d+1}$.

Dato $p \in [1, +\infty]$, possiamo identificare lo spazio $W^{1,p}(\Omega)$ con lo spazio dei campi vettoriali

$$(u, v_1, v_2, \dots, v_d) \in L^p(\Omega) \times \big(L^p(\Omega)\big)^d$$

tali per cui v_j sia la derivata parziale debole $\partial_j u$, ovvero:

$$\int_\Omega u(x)\partial_j\phi(x)\,dx = -\int_I v_j(x)\phi(x)\,dx \qquad \text{per ogni} \qquad \phi \in C_c^1(\Omega).$$

Allora, $W^{1,p}(\Omega)$ è un sottospazio chiuso dello spazio di Banach $\Big(L^p(\Omega)\Big)^{d+1}$ munito della norma

$$\|(u, v_1, v_2, \dots, v_d)\| := \|u\|_{L^p(I)} + \sum_{j=1}^{d} \|v_j\|_{L^p(\Omega)}.$$

In particolare, abbiamo la proposizione seguente.

Proposizione 1. *Per ogni $p \in [1, +\infty)$ lo spazio $W^{1,p}(\Omega)$ è separabile.*