Teoremi di approssimazione, estensione e compattezza in $W^{1,p}(B_R)$

Teorema di approssimazione in $W^{1,p}(B_R)$

Lemma 1. *Sia B_R la palla di raggio R in $\mathbb{R}^d$ e sia $p \in (1, +\infty)$. Sia $u \in W^{1,p}(B_R)$. Allora:*

(i) *per ogni $t > 1$, la funzione*

$$u_t(x) := u(x/t)\,,$$

è in $W^{1,p}(B_{tR})$ ed il suo gradiente debole è

$$\nabla u_t(x) := \frac{1}{t}\nabla u(x/t)\,;$$

(ii) *u_t converge a u (per $t \to 1$) fortemente in $W^{1,p}(B_R)$.*

Dimostrazione. Dimostriamo (i). È immediato verificare che $u_t \in L^p(B_{tR})$ e $\nabla u_t \in \big(L^p(B_{tR})\big)^d$ e che

$$\int_{B_{tR}} u_t^p\,dx = \int_{B_{tR}} |u(x/t)|^p\,dx = t^d\int_{B_R}|u(y)|^p\,dy\;;\qquad \int_{B_{tR}}\left|\frac{1}{t}\nabla u(x/t)\right|^p dx = t^{d-p}\int_{B_R}|\nabla u(y)|^p\,dy\,.$$

Ora, per una qualsiasi campo $\Phi \in C^1_c(B_{tR};\mathbb{R}^d)$ consideriamo il campo

$$\Phi_t(x) := \Phi(tx)\;,\qquad \Phi_t \in C^1_c(B_R;\mathbb{R}^d).$$

Osserviamo che

$$\Phi(y) = \Phi_t(y/t)\qquad \text{e}\qquad \mathrm{div}\Phi(y) = \frac{1}{t}\big(\mathrm{div}\Phi_t\big)(y/t).$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int_{B_{tR}} u_t(x)\,\mathrm{div}\,\Phi(x)\,dx &= \int_{B_{tR}} u(x/t)\,\frac{1}{t}\big(\mathrm{div}\,\Phi_t\big)(x/t)\,dx\\ &= t^d\int_{B_R} u(y)\,\frac{1}{t}\big(\mathrm{div}\,\Phi_t\big)(y)\,dy\\ &= t^{d-1}\int_{B_R}\nabla u(y)\cdot\Phi_t(y)\,dy\\ &= \int_{B_{tR}}\frac{1}{t}\nabla u(x/t)\cdot\Phi_t(x/t)\,dx = \int_{B_{tR}}\Big(\frac{1}{t}\nabla u(x/t)\Big)\cdot\Phi(x)\,dx,\end{aligned}$$

ovvero $u_t \in W^{1,p}(B_R)$ ed il suo gradiente debole ∇u_t è precisamente

$$\nabla u_t(x) = \frac{1}{t}\nabla u(x/t)\,.$$

Per dimostrare (2), osserviamo che per ogni $\varphi \in C^\infty_c(B_R)$ abbiamo

$$\int_{B_R} u_t(x)\varphi(x)\,dx = \int_{B_R} u(x/t)\varphi(x)\,dx = \int_{B_{R/t}} u(y)\varphi(ty)\,dx.$$

Ora, siccome φ è regolare ed a supporto compatto, otteniamo:

$$\lim_{t\to1}\int_{B_R} u_t(x)\varphi(x)\,dx = \int_{B_R} u(x)\varphi(x)\,dx\,,$$

e quindi $u_t \to u$ debolmente in $L^p(B_R)$. Siccome

$$\lim_{t\to1}\int_{B_R}|u_t|^p = \int_{B_R}|u|^p\qquad \text{e}\qquad \lim_{t\to1}\int_{B_R}|\nabla u_t|^p = \int_{B_R}|\nabla u|^p\,,$$

abbiamo che la convergenza è forte in $W^{1,p}(B_R)$. $\square$

Teorema 2. *Sia B_R la palla di raggio R in $\mathbb{R}^d$ e sia $p \in (1, +\infty)$. Allora, per ogni $u \in W^{1,p}(B_R)$ esiste una successione u_n di funzioni C^∞, ciascuna definita in un intorno di $\overline{B}_R$, tali che $u_n \to u$ fortemente in B_R*

(i) *per ogni $t > 1$, la funzione*
$$u_t(x) := u(x/t)\,,$$
è in $W^{1,p}(B_{tR})$ ed il suo gradiente debole è
$$\nabla u_t(x) := \frac{1}{t}\nabla u(x/t)\,;$$

(ii) *u_t converge a u (per $t \to 1$) fortemente in $W^{1,p}(B_R)$.*

Teorema di estensione per funzioni in $W^{1,p}(B_R)$

Lemma 3. *Siano $\varphi : \overline{B}_R \to \mathbb{R}$ e $\psi : \overline{B}_{2R} \setminus B_R \to \mathbb{R}$ due funzioni di classe C^1 fino al bordo tali che*
$$\varphi \equiv \psi \quad su \quad \partial B_R.$$
Allora, per ogni $p \in [1, +\infty]$, la funzione
$$u : B_{2R} \to \mathbb{R}\ , \qquad u(x) = \begin{cases} \varphi(x) & se \quad x \in B_R, \\ \psi(x) & se \quad x \in B_{2R} \setminus B_R, \end{cases}$$
$$\nabla u(x) = \begin{cases} \nabla\varphi(x) & se \quad x \in B_R, \\ \nabla\psi(x) & se \quad x \in B_{2R} \setminus B_R. \end{cases}$$

Lemma 4. *Sia B_R la palla di raggio R in $\mathbb{R}^d$ e sia $p \in (1, +\infty)$. Allora, per ogni $u \in W^{1,p}(B_R)$ esiste una funzione $v \in W^{1,p}(B_{2R})$ con le proprietà seguenti:*

- *$v \equiv u$ in B_R;*
- *$\|\nabla v\|_{L^p(B_R)} \le C_d \|\nabla u\|_{L^p(B_R)}$, dove C_d è una costante dimensionale.*

Dimostrazione. Per il teorema di approssimazione con funzioni regolari, basta dimostrare il teorema nel caso in cui u è una funzione $C^1(\overline{B}_R)$. Possiamo inoltre assumere $R = 1$. Ora, basta prendere
$$v(x) := \begin{cases} u(x) & \text{se} \quad x \in B_1; \\ \psi(x) & \text{se} \quad x \in B_2 \setminus B_1, \end{cases}$$
dove $\psi(x) := u(x/|x|^2)$, applicare il lemma precedente e verificare che
$$\int_{B_2 \setminus B_1} |\nabla\psi|^p\, dx \le C_d \int_{B_1} |\nabla u|^p\, dx.$$
□

Teorema 5. *Sia B_R la palla di raggio R in $\mathbb{R}^d$ e sia $p \in (1, +\infty)$. Allora, per ogni $u \in W^{1,p}(B_R)$ esiste una funzione $\widetilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ con le proprietà seguenti:*

- *$\widetilde{u} \equiv u$ in B_R;*
- *$\widetilde{u} \equiv 0$ in $\mathbb{R}^d \setminus B_{2R}$;*
- *$\|\nabla \widetilde{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \le C\Big(\|u\|_{L^p(B_R)} + \|\nabla u\|_{L^p(B_R)}\Big)$, dove C è una costante che dipende solo da d ed R.*

L'inclusione compatta di $W^{1,p}(B_R)$ in $L^p(B_R)$

Teorema 6. *Sia B_R la palla di raggio R in $\mathbb{R}^d$ e sia $p \in (1, +\infty)$. Data una successione $u_n \in W^{1,p}(B_R)$, limitata in $W^{1,p}(B_R)$, esistono una funzione $u \in W^{1,p}(B_R)$ ed una sottosuccession u_{n_k} tali che*
$$u_{n_k} \to u \quad fortemente\ in \quad L^p(B_R).$$