Funzioni di Sobolev di più variabili

Funzioni di Sobolev e derivate deboli

Dato un insieme aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ e $p \in [1, +\infty]$, definiamo lo spazio di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ come lo spazio delle funzioni $u \in L^p(\Omega)$ tali per cui esistono d funzioni

$$v_1, v_2, \dots, v_d \in L^p(\Omega),$$

con la proprietà seguente. Per ogni $j = 1, \dots, d$

$$\int_I u(x)\partial_j \phi(x)\, dx = -\int_I v_j(x)\phi(x)\, dx \qquad \text{per ogni} \qquad \phi \in C_c^1(I).$$

Equivalentemente, usando la notazione

$$V := (v_1, \dots, v_d) \in \Big(L^p(\Omega)\Big)^d$$

abbiamo che $u \in W^{1,p}(\Omega)$ se per ogni

$$\Phi = \big(\phi_1, \dots, \phi_d\big) \in C_c^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$$

si ha

$$\int_I u(x) \operatorname{div} \Phi(x)\, dx = -\int_I V(x) \cdot \Phi(x)\, dx\,,$$

dove

$$\operatorname{div} \Phi(x) := \sum_{j=1}^d \partial_j \phi_j(x) \qquad \text{e} \qquad V(x) \cdot \Phi(x) := \sum_{j=1}^d v_j(x)\phi_j(x)\,.$$

La funzioni $v_1, \dots, v_d$ sono le **derivate parziali deboli** di u mentre V è il **gradiente debole** di u.

Unicità delle derivata e del gradiente deboli

Supponiamo che, data $u \in L^p(\Omega)$, esistono due funzioni $v_j, w_j \in L^p(\Omega)$ tali che:

$$\int_I u(x)\partial_j \phi(x)\, dx = -\int_I v_j(x)\phi(x)\, dx \qquad \text{per ogni} \qquad \phi \in C_c^1(I).$$

$$\int_I u(x)\partial_j \phi(x)\, dx = -\int_I w_j(x)\phi(x)\, dx \qquad \text{per ogni} \qquad \phi \in C_c^1(I).$$

Allora,

$$\int_I \Big(v_j(x) - w_j(x)\Big)\phi(x)\, dx = 0 \qquad \text{per ogni} \qquad \phi \in C_c^1(\Omega).$$

Di conseguenza,

$$v_j = w_j \quad \text{in} \quad \Omega.$$

D'ora in poi useremo le notazioni $\partial_1 u$, $\partial_2 u, \dots, \partial_d u$ e

$$\nabla u := (\partial_1 u, \dots, \partial_d u)\,,$$

per indicare la derivata debole di una funzione $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Esempi

Funzioni regolari

Esempio 1. *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ ed $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 su Ω tale che:*

$$\int_\Omega |F(x)|^p \, dx < +\infty \qquad e \qquad \int_I |\nabla F(x)|^p \, dx < +\infty \; .$$

Allora $F \in W^{1,p}(\Omega)$ ed il suo gradiente debole è esattamente ∇F. Infatti,

$$\int_\Omega F(x) \operatorname{div} \Phi(x) \, dx + \int_\Omega \nabla F(x) \cdot \Phi(x) = \int_\Omega \operatorname{div} \big(F(x)\Phi(x) \big)' \, dx = 0 \,,$$

per ogni campo vettoriale $\Phi \in C^1_c(\Omega; \mathbb{R}^d)$.

Un criterio generale per funzioni regolari al di fuori di un punto

Proposizione 2. *Sia $B_1 \subset \mathbb{R}^d$ ed $F : B_1 \setminus \{0\}$ una funzione di classe C^1 in $B_1 \setminus \{0\}$ e tale che*

$$F \in L^p(B_1) \qquad e \qquad |\nabla F| \in L^p(B_1) \,,$$

per un qualche $p \in [1, +\infty)$. Se

$$\lim_{r \to 0} \int_{\partial B_r} |F| = 0 \,,$$

allora la funzione F è in $W^{1,p}(B_1)$ ed il suo gradiente debole è precisamente ∇F.

Dimostrazione. Sia $\Phi \in C^1_c(B_1)$. Siccome

$$F \in L^p(B_1) \qquad \text{e} \qquad |\nabla F| \in L^p(B_1) \,,$$

abbiamo che

$$\lim_{r \to 0} \int_{B_1 \setminus B_r} F(x) \operatorname{div} \Phi(x) \, dx = \int_{B_1} F(x) \operatorname{div} \Phi(x) \, dx \,;$$

$$\lim_{r \to 0} \int_{B_1 \setminus B_r} \nabla F(x) \cdot \Phi(x) \, dx = \int_{B_1} \nabla F(x) \cdot \Phi(x) \, dx \,.$$

D'altra parte, per ogni $r > 0$, abbiamo che

$$\int_{B_1 \setminus B_r} F(x) \operatorname{div} \Phi(x) \, dx + \int_{B_1 \setminus B_r} \nabla F(x) \cdot \Phi(x) \, dx = - \int_{\partial B_r} F(x) \Phi(x) \cdot \frac{x}{|x|} \, d\sigma(x) \,.$$

Siccome, per ipotesi

$$\int_{\partial B_r} F(x) \Phi(x) \cdot \frac{x}{r} \to 0 \,,$$

otteniamo che

$$\int_{B_1} F(x) \operatorname{div} \Phi(x) \, dx = - \int_{B_1} \nabla F(x) \cdot \Phi(x) \, dx.$$

$\square$

Una funzione di Sobolev con discontinuità in $(0,0)$

Esempio 3. *Consideriamo la funzione*

$$F : B_1 \setminus \{(0,0)\}\ , \quad F(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}\ .$$

Allora, $F \in W^{1,p}(B_1)$ *per ogni* $p \in [1,2)$.

Una funzione di Sobolev non limitata

Esempio 4. *Dati* $\alpha > 0$, $p \geq 1$ *e* $d \geq 2$, *consideriamo la funzione*

$$F : \mathbb{R}^d \setminus \{0\}\ , \quad F(x,y) = \frac{1}{|x|^\alpha}\ .$$

Se

$$d - p(\alpha+1) > 0\,,$$

allora $F \in W^{1,p}(B_1)$ *ed il suo gradiente debole è dato da*

$$\nabla F(x) = -\alpha \frac{x}{|x|^{\alpha+2}}\ .$$