Parte positiva e modulo di una funzione di Sobolev

La parte positiva di una funzione di Sobolev

Teorema 1. *Sia I un intervallo aperto e sia $p \in [1, \infty]$.*
Sia $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni tale che:

(a) $g_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ *per ogni* n ;

(b) $0 \le g_n \le 1$ *su* $\mathbb{R}$ *per ogni* n;

(c) $g_n(x) = 0$ *per ogni* $x \le \frac{1}{n}$ *e per ogni* n;

(d) $g_n(x) = 1$ *per ogni* $x \ge \frac{2}{n}$ *e per ogni* n;

(e) *la successione* g_n *è crescente e*

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \begin{cases} 0 & \textit{se} \quad x \le 0, \\ 1 & \textit{se} \quad x > 0; \end{cases}$$

Sia $G_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione

$$G_n(x) = \int_{-\infty}^{x} g_n'(t)\, dt \qquad \textit{per ogni} \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Allora, per ogni $u \in W^{1,p}(I)$, la successione $G_n(u) \in W^{1,p}(I)$ converge fortemente in $W^{1,p}(I)$ a

$$u_+ : I \to \mathbb{R}\ , \qquad u_+(x) := \begin{cases} u(x) & \textit{se} \quad u(x) > 0, \\ 0 & \textit{se} \quad u(x) \le 0. \end{cases}$$

In particolare,

$$u_+ \in W^{1,p}(I) \qquad e \qquad (u_+)' = \mathbb{1}_{\{u>0\}}\, u'\,.$$

Dimostrazione. Osserviamo che la successione di funzioni $G_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ha le proprietà seguenti:

- $G_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ per ogni n ;
- $|G_n'| \le 1$ su $\mathbb{R}$ per ogni n;
- la successione G_n' è crescente e

$$\lim_{n\to\infty} G_n'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \le 0; \\ 1 & \text{se} \quad x > 0; \end{cases}$$

- $G_n(x) = 0$ per ogni $x \le \frac{1}{n}$ e per ogni n;
- $0 \le G_n(x) \le x$ per ogni $x \ge 0$;
- $0 \le x - G_n(x) \le \frac{2}{n}$ per ogni $x \ge 0$ e per ogni n.

Ora fissata, $u \in W^{1,p}(I)$, osserviamo che:

(1) Per ogni funzione $u \in W^{1,p}(I)$,

$$G_n(u) \to u_+ \quad \text{puntualmente su} \quad I.$$

Siccome,

$$|G_n(u)| \leq u_+ \quad \text{per ogni} \quad n \geq 1,$$

per il teorema della convergenza dominata

$$G_n(u) \to u_+ \quad \text{fortemente in} \quad L^p(I).$$

(2) Infine, osserviamo che per costruzione

$$G_n'(u) \to \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(u) \quad \text{puntualmente su} \quad I.$$

Quindi, anche

$$G_n'(u)u' \to \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(u)u' \quad \text{puntualmente su} \quad I.$$

Siccome $|G_n'| \leq 1$, abbiamo che

$$|G_n'(u)u'| \leq |u'| \quad \text{per ogni} \quad n \geq 1,$$

per il teorema della convergenza dominata, abbiamo:

$$G_n'(u)u' \to \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(u)u' \quad \text{fortemente in} \quad L^p(I).$$

In conclusione,

$$G_n(u) \to u_+ \quad \text{fortemente in} \quad W^{1,p}(I),$$

e, siccome $\mathbb{1}_{(0,+\infty)}(u(x)) = \mathbb{1}_{\{u>0\}}(x)$, abbiamo

$$(u_+)' = \mathbb{1}_{\{u>0\}}u'.$$

$\square$

Modulo di una funzione di Sobolev

Corollario 2. *Sia I un intervallo aperto e sia $p \in [1, \infty]$. Allora, per ogni $u \in W^{1,p}(I)$,*

$$|u| \in W^{1,p}(I) \qquad e \qquad (|u|)' = \mathbb{1}_{\{u>0\}}u' - \mathbb{1}_{\{u<0\}}u'.$$

Corollario 3. *Sia I un intervallo aperto e sia $p \in [1, \infty]$. Allora, per ogni $u \in W^{1,p}(I)$,*

$$u' = \mathbb{1}_{\{u>0\}}u' + \mathbb{1}_{\{u<0\}}u'.$$

In particolare, dato un insieme misurabile $E \subset I$, abbiamo che se

$$u = 0 \quad \textit{quasi-ovunque su} \quad E,$$

allora

$$u' = 0 \quad \textit{quasi-ovunque su} \quad E.$$