Disuguaglianze di Clarkson

Disuguaglianza di Clarkson nel caso $p \geq 2$

Proposizione 1. *Sia $p \geq 2$ un numero reale. Allora, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, si ha*

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p \leq \frac{|a|^p}{2} + \frac{|b|^p}{2}.$$

Dimostrazione.
Step 1. Dimostrare che

$$1 + t^p \leq \left(1 + t^2\right)^{p/2} \qquad \text{per ogni} \qquad t \geq 0.$$

Step 2. Dimostrare che

$$x^p + y^p \leq \left(x^2 + y^2\right)^{p/2} \qquad \text{per ogni} \qquad x, y \geq 0.$$

Step 3. Prendendo $x = \frac{a+b}{2}$ e $y = \frac{a-b}{2}$, dimostrare che

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p \leq \frac{|a|^p}{2} + \frac{|b|^p}{2},$$

per ogni $a, b \geq 0$.
Step 4. Concludere studiando il segno di a e b. □

Disuguaglianza di Clarkson nel caso $p \leq 2$

Proposizione 2. *Sia $p \in (1, 2]$ un numero reale. Allora, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, si ha*

$$|a+b|^p + |a-b|^p \leq 2\Big(|a|^p + |b|^p\Big).$$

Dimostrazione.
Step 1. Dimostrare che

$$1 + t^p - \left(1 + t^2\right)^{p/2} \geq 0 \qquad \text{per ogni} \qquad t \geq 0.$$

Step 2. Dimostrare che

$$x^p + y^p \geq \left(x^2 + y^2\right)^{p/2} \qquad \text{per ogni} \qquad x, y \geq 0.$$

Step 3. Prendendo $x = \frac{u+v}{2}$ e $y = \frac{u-v}{2}$, dimostrare che

$$\left|\frac{u+v}{2}\right|^p + \left|\frac{u-v}{2}\right|^p \geq \frac{|u|^p}{2} + \frac{|v|^p}{2},$$

per ogni $u, v \in \mathbb{R}$.
Step 4. Concludere prendendo $u = \dfrac{a+b}{2}$ e $v = \dfrac{a-b}{2}$. □