Formula di Stokes in $\mathbb{R}^2$

Integrazione di 2-forme in $\mathbb{R}^2$

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^2$ e sia α una 2-forma su Ω

$$\alpha = F(x,y)\,dx\wedge dy.$$

Definiamo

$$\iint_\Omega \alpha := \iint_\Omega F(x,y)\,dx\,dy.$$

Osserviamo che con questa definizione si ha

$$\iint_\Omega F(x,y)\,dy\wedge dx = -\iint_\Omega F(x,y)\,dx\wedge dy\ .$$

Formula di Stokes in domini normali

Teorema 1 (Formula di Stokes in domini normali)**.** *Siano*

$$u:[a,b]\to\mathbb{R} \qquad e \qquad v:[a,b]\to\mathbb{R}$$

due funzioni di classe $C^1([a,b])$ e tali che

$$u(x) < v(x) \quad \textit{per ogni} \quad x\in(a,b),$$

e sia

$$\Omega = \Big\{(x,y)\ :\ x\in[a,b],\ u(x)\le y\le v(x)\Big\}$$

il dominio normale determinato da u e v. Sia α una 1-forma di classe C^1 in $\mathbb{R}^2$

$$\alpha = F(x,y)\,dx + G(x,y)\,dy.$$

Allora

$$\iint_\Omega d\alpha = \int_\gamma \alpha,$$

dove γ è una curva semplice chiusa che parametrizza il bordo $\partial\Omega$ in senso antiorario.

Proof. Prima calcoliamo

$$d\alpha = dF\wedge dx + dG\wedge dy = \Big(-\partial_y F(x,y) + \partial_x G(x,y)\Big)\,dx\wedge dy$$

Ora, per definizione di integrale di una 2-forma

$$\begin{aligned}\iint_\Omega d\alpha &= \iint_\Omega \Big(-\partial_y F(x,y) + \partial_x G(x,y)\Big)\,dx\wedge dy\\ &= \iint_\Omega \Big(-\partial_y F(x,y) + \partial_x G(x,y)\Big)\,dx\,dy\\ &= \int_a^b\int_{u(x)}^{v(x)} \Big(-\partial_y F(x,y) + \partial_x G(x,y)\Big)\,dy\,dx \qquad \text{(per il teorema di Fubini)}\end{aligned}$$

Ora, usando le formule di integrazione per parti, abbiamo che

$$\int_a^b\int_{u(x)}^{v(x)}\Big(-\partial_y F(x,y)\Big)\,dy\,dx = -\int_a^b \Big(F\big(x,v(x)\big) - F\big(x,u(x)\big)\Big)\,dx$$

e anche

$$\begin{aligned}\int_a^b\int_{u(x)}^{v(x)} \partial_x G(x,y)\ dy\,dx = \int_a^b u'(x)\,G\big(x,u(x)\big)\,dx - \int_a^b v'(x)\,G\big(x,v(x)\big)\,dx\\ + \int_{u(b)}^{v(b)} G(b,y)\,dy - \int_{u(a)}^{v(a)} G(a,y)\,dy.\end{aligned}$$

Infine, abbiamo

$$\begin{aligned}\iint_\Omega d\alpha &= \int_a^b \int_{u(x)}^{v(x)} \Big(-\partial_y F(x,y) + \partial_x G(x,y)\Big)\, dy\, dx \\ &= \int_a^b \Big(-F\big(x, v(x)\big) - v'(x)\, G\big(x, v(x)\big)\Big)\, dx \\ &\quad + \int_a^b \Big(F\big(x, u(x)\big) + u'(x)\, F\big(x, u(x)\big)\Big)\, dx \\ &\quad + \int_{u(b)}^{v(b)} G(b,y)\, dy - \int_{u(a)}^{v(a)} G(a,y)\, dy.\end{aligned}$$

Per concludere, osserviamo che la somma degli integrali a destra è esattamente $\displaystyle\int_\gamma \alpha$. □

Teorema 2 (Formula di Stokes in domini regolari)**.** *Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^2$ con bordo $\partial\Omega$ di classe C^1. Sia α una 1-forma di classe C^1 in $\mathbb{R}^2$, $\alpha = F(x,y)\,dx + G(x,y)\,dy$. Allora*

$$\iint_\Omega d\alpha = \int_{(\partial\Omega)^+} \alpha \ .$$

Osservazione 3. *Siccome Ω è di classe C^1, is suo bordo può essere parametrizzato da un numero finito di curve semplici chiuse $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ di classe C^1. Inoltre, possiamo supporre che tutte le curve γ_i sono orientate in senso antiorario. In particolare, per ogni 1-forma α, possiamo definire l'integrale $\displaystyle\int_{(\partial\Omega)^+} \alpha$ come*

$$\int_{(\partial\Omega)^+} \alpha := \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} \alpha \ .$$

Esercizi

Esercizio 4. *Sia D il dominio*

$$D = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le x \Big\}$$

e sia γ una curva semplice chiusa C^1 a tratti che parametrizza il bordo di D in senso antiorario. Data la 1-forma

$$\alpha = xy\, dx + x\, dy \ ,$$

calcolare $\displaystyle\int_\gamma \alpha$.

Esercizio 5. *Sia α la 1-forma*

$$\alpha = \frac{-y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy$$

e sia $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ la curva

$$\gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t).$$

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \alpha$.

Esercizio 6 (Appello giugno 2021)**.** *Sia D il dominio*

$$D = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le x \Big\}$$

e sia γ una curva semplice chiusa C^1 a tratti che parametrizza il bordo di D in senso antiorario. Data la 1-forma

$$\alpha = x^2\, dx + y^2\, dy \ ,$$

calcolare $\displaystyle\int_\gamma \alpha$.

Esercizio 7 (Appello giugno 2021). *Sia D il dominio*

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le x\Big\}$$

e sia γ una curva semplice chiusa C^1 a tratti che parametrizza il bordo di D in senso antiorario. Data la 1-forma

$$\alpha = x^2\,dx + xy\,dy\ ,$$

calcolare $\displaystyle\int_\gamma \alpha$.

Esercizio 8 (Appello giugno 2021). *Sia D il dominio*

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x \le 1, \ x^2 \le y \le x\Big\}$$

e sia γ una curva semplice chiusa C^1 a tratti che parametrizza il bordo di D in senso antiorario. Data la 1-forma

$$\alpha = x\,dx + xy\,dy\ ,$$

calcolare $\displaystyle\int_\gamma \alpha$.

Esercizio 9 (Luglio 2020). *Sia D il dominio*

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x \le 1, \ 2x^3 \le y \le 3x^2\Big\}$$

e sia γ una curva semplice chiusa C^1 a tratti che parametrizza il bordo di D in senso antiorario. Data la 1-forma

$$\alpha = (x\sin x - 2y)\,dx + (y - x)\,dy\ ,$$

calcolare l'integrale $\displaystyle\int_\gamma \alpha$.

Esercizio 10 (Giugno 2020). *Sia D il dominio*

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -1 \le x \le 1, \ 2x^2 \le y \le x^2 + 1\Big\}$$

e sia γ una curva semplice chiusa C^1 a tratti che parametrizza il bordo di D in senso antiorario. Data la 1-forma

$$\alpha = (x^2 - 2xy)\,dx + (y^3 + x)\,dy\ ,$$

calcolare l'integrale $\displaystyle\int_\gamma \alpha$.