La formula di Stokes su domini regolari bidimensionali

Il bordo di un dominio regolare bidimensionale

Teorema 1. *Sia D un dominio di classe C^1 in $\mathbb{R}^2$ e sia $\nu : \partial D \to \mathbb{R}^2$ il vettore normale uscente su ∂D. Allora, esiste una famiglia finita di curve*

$$\sigma_j : [a_j, b_j] \to \mathbb{R}^2 \,, \qquad j = 1, \dots, N \,,$$

tali che:

- *per ogni $j = 1, \dots, N$, la curva*
$$\sigma_j : [a_j, b_j] \to \mathbb{R}^2$$
è una curva semplice, chiusa, di classe C^1, con $\sigma_j'(a_j) = \sigma_j'(b_j)$, e regolare, ovvero:
$$|\sigma_j'(t)| > 0 \quad \textit{per ogni} \quad t \in [a_j, b_j].$$
- *per ogni coppia di indici $i \neq j$*
$$\mathrm{Im}(\sigma_i) \cap \mathrm{Im}(\sigma_j) = \emptyset \,,$$
dove $\mathrm{Im}(\sigma_i)$ e $\mathrm{Im}(\sigma_j)$ sono i sostegni delle curve σ_i e σ_j:
$$\mathrm{Im}(\sigma_i) := \Big\{ \sigma_i(t) \ : \ t \in [a_i, b_i] \Big\};$$
- *le curve σ_i, $i = 1, \dots, N$, parametrizzano il bordo di D, ovvero*
$$\partial D = \bigcup_{j=1}^{N} \mathrm{Im}(\sigma_j) \ ;$$
- *le curve σ_i sono orientate positivamente:*
$$\det\Big(\nu\big(\sigma_i(t)\big) \,,\, \sigma_i'(t)\Big) > 0 \qquad \textit{per ogni} \qquad t \in [a_i, b_i],$$
e per ogni indice $i = 1, \dots, N$.

Definizione 2. *In seguito diremo che la famiglia*

$$\Big\{ \sigma_j \ : \ j = 1, \dots, N \Big\}$$

è una famiglia di curve semplici, chiuse, di classe C^1 e regolari che parametrizzano il bordo ∂D in senso antiorario.

Definizione 3. *Dati un apero Ω che contiene D ed una 1-forma di classe C^0 su Ω*

$$\alpha = a(x, y)\, dx + b(x, y)\, dy \,,$$

definiamo l'integrale di α sul bordo di D (orientato positivamente) come

$$\int_{(\partial D)_+} \alpha := \sum_{j=1}^{N} \int_{\sigma_j} \alpha \,.$$

Formula di Stokes su domini regolari

Teorema 4. *Siano D un dominio regolare in $\mathbb{R}^2$, Ω un aperto che contiene D ed*

$$\alpha = a(x, y)\, dx + b(x, y)\, dy$$

una 1-forma di classe C^1 su Ω. Allora,

$$\iint_D d\alpha = \int_{(\partial D)^+} \alpha \ .$$

Dimostrazione. Sia ψ_j, $j = 1, \ldots, M$ la partizione dell'unità associata al dominio D. Allora,

$$\int_{(\partial D)_+} \alpha = \sum_{i=1}^{N} \int_{\sigma_i} \alpha = \sum_{i=1}^{N} \int_{\sigma_i} \Big(\sum_{j=1}^{M} \psi_j \alpha \Big) = \sum_{j=1}^{M} \int_{(\partial D)_+} \psi_j \alpha \, .$$

Ora, siccome per ogni j la funzione ψ_j è zero sul bordo del rettangolo

$$D \cap \partial \mathcal{R}_j ,$$

abbiamo che

$$\int_{(\partial D)_+} \psi_j \alpha := \int_{(\partial(D \cap \mathcal{R}_j))_+} \psi_j \alpha \, .$$

Quindi

$$\int_{(\partial D)_+} \alpha = \sum_{j=1}^{M} \int_{(\partial(D \cap \mathcal{R}_j))_+} \psi_j \alpha \, .$$

Ora, siccome $D \cap \mathcal{R}_j$ è un dominio normale, possiamo applicare la formula di Stokes:

$$\int_{(\partial(D \cap \mathcal{R}_j))_+} \psi_j \alpha = \iint_{D \cap \mathcal{R}_j} d(\psi_j \alpha).$$

Usando di nuovo che

$$\psi_j \equiv 0 \quad \text{su} \quad D \setminus \mathcal{R}_j ,$$

otteniamo che

$$\int_{(\partial D)_+} \alpha = \sum_{j=1}^{M} \int_{(\partial(D \cap \mathcal{R}_j))_+} \psi_j \alpha = \sum_{j=1}^{M} \iint_{D \cap \mathcal{R}_j} d(\psi_j \alpha) = \sum_{j=1}^{M} \iint_{D} d(\psi_j \alpha).$$

Ora, usando la linearità dell'integrale e della derivata esterna, otteniamo

$$\sum_{j=1}^{M} \iint_{D} d(\psi_j \alpha) = \iint_{D} \left(\sum_{j=1}^{M} d(\psi_j \alpha) \right) = \iint_{D} d \left(\sum_{j=1}^{M} \psi_j \alpha \right) = \iint_{D} d\alpha.$$

$\square$