

## INTEGRAZIONE SU DOMINI NORMALI. ESERCIZI

**Esercizio 1** (Appello giugno 2021). *Consideriamo il dominio*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 2x - x^2\}.$$

e la funzione

$$F(x, y) = xy.$$

Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D F(x, y) dx dy.$$

**Esercizio 2** (Secondo appello giugno 2021). *Consideriamo il dominio d'integrazione*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2x^2 \leq y \leq 2x + x^2\}.$$

e la funzione

$$F(x, y) = xy.$$

Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D F(x, y) dx dy.$$

**Esercizio 3** (Appello luglio 2021). *Consideriamo il dominio d'integrazione*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{2x^2 + 1} \leq y \leq x + 1\}.$$

e la funzione

$$F(x, y) = xy.$$

Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D F(x, y) dx dy.$$

**Esercizio 4** (Appello settembre 2021). *Consideriamo il dominio d'integrazione*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq \sqrt{2x^2 + 1}\}.$$

e la funzione

$$F(x, y) = 2y.$$

Calcolare l'integrale

$$\iint_D F(x, y) dx dy.$$

**Esercizio 5** (Appello gennaio 2021). *Siano  $D$  il dominio*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 - |x|\}.$$

ed  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la funzione

$$F(x, y) = y + x^3 y^2$$

Calcolare l'integrale

$$I = \iint_D F(x, y) dx dy.$$

**Esercizio 6** (Appello gennaio 2021). *Siano  $D$  il dominio*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq x\}.$$

ed  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la funzione

$$F(x, y) = x + y$$

Calcolare l'integrale

$$I = \iint_D F(x, y) dx dy.$$

**Esercizio 7** (Appello gennaio 2021). *Calcolare l'area del dominio*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 2x - x^2\}.$$

**Esercizio 8** (Appello gennaio 2021). *Calcolare l'area del dominio*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 3x - x^2\}.$$

**Esercizio 9** (Appello 2020). *Sia  $B_1$  la palla di raggio 1 e centro zero in  $\mathbb{R}^2$ . Calcolare l'integrale*

$$I = \int_{B_1} \sqrt{1 + x^2 + y^2} \, dx \, dy$$

**Esercizio 10** (Appello febbraio 2021). *Sia  $\Omega$  l'insieme*

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 \leq y \leq x$$

*Calcolare*

$$\iint_{\Omega} x \, dx \, dy.$$

**Esercizio 11** (Appello febbraio 2021). *Sia  $\Omega$  l'insieme*

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 \leq y \leq 1$$

*Calcolare*

$$\iint_{\Omega} y \, dx \, dy.$$

**Esercizio 12** (Appello aprile 2021). *Sia  $\Omega$  l'insieme*

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2$$

*Calcolare*

$$\iint_{\Omega} x \, dx \, dy$$

**Esercizio 13** (Appello aprile 2021). *Sia  $\Omega$  l'insieme*

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2$$

*Calcolare*

$$\iint_{\Omega} y \, dx \, dy$$

**Esercizio 14** (Appello aprile 2021). *Sia  $\Omega$  l'insieme*

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x$$

*Calcolare*

$$\iint_{\Omega} x \, dx \, dy$$

**Esercizio 15** (Appello aprile 2021). *Sia  $\Omega$  l'insieme*

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x$$

*Calcolare*

$$\iint_{\Omega} y \, dx \, dy$$

**Esercizio 16.** *Sia  $\Omega$  l'insieme*

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq x$$

*Calcolare*

$$\iint_{\Omega} (x^2 + y^2) \, dx \, dy$$

**Esercizio 17.** *Sia  $\Omega$  l'insieme*

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 1$$

*Calcolare*

$$\iint_{\Omega} y \, dx \, dy$$

**Esercizio 18.** Sia  $\Omega$  l'insieme

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 1$$

Calcolare

$$\iint_{\Omega} y \, dx \, dy$$

**Esercizio 19.** Sia  $\Omega$  l'insieme

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq x$$

Calcolare

$$\iint_{\Omega} y \, dx \, dy$$

**Esercizio 20.** Calcolare

$$\iint_{B_1} e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy$$

**Esercizio 21.** Calcolare in funzione del parametro  $a > 0$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-a(x^2+y^2)} \, dx \, dy$$

**Esercizio 22.** Sia  $\Omega$  l'insieme

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax^2 + by^2 \leq 1$$

Calcolare in funzione di  $a > 0$  e  $b > 0$  l'integrale

$$\iint_{\Omega} 1 \, dx \, dy$$

**Esercizio 23.** Sia  $\Omega$  l'insieme

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax^2 + by^2 \leq 1$$

Calcolare in funzione di  $a > 0$  e  $b > 0$  l'integrale

$$\iint_{\Omega} (x + 2y) \, dx \, dy$$

**Esercizio 24.** Sia  $\Omega$  l'insieme

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax^2 + by^2 \leq 1$$

Calcolare in funzione di  $a > 0$  e  $b > 0$  l'integrale

$$\iint_{\Omega} x^2 \, dx \, dy$$

**Esercizio 25.** Sia  $\Omega$  l'insieme

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax^2 + by^2 \leq 1$$

Calcolare in funzione di  $a > 0$  e  $b > 0$  l'integrale

$$\iint_{\Omega} (x^2 + y^2) \, dx \, dy$$

**Esercizio 26.** Sia  $\Omega$  l'insieme

$$[0, 1] \times [1, 2]$$

Calcolare l'integrale

$$\iint_{\Omega} xy \, dx \, dy$$

**Esercizio 27.** Sia  $\Omega$  l'insieme

$$[0, 1] \times [0, 1]$$

Calcolare gli integrali

$$I_1 = \iint_{\Omega} x \, dx \, dy ; \quad I_2 = \iint_{\Omega} xy \, dx \, dy ; \quad I_3 = \iint_{\Omega} x^2 \, dx \, dy .$$

**Esercizio 28.** Siano  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  e  $\Omega_3$  gli insiemi

$$\Omega_1 = [0, 1] \times [0, 4] ; \quad \Omega_2 = [0, 2] \times [0, 2] ; \quad \Omega_3 = [0, 4] \times [0, 1] .$$

Calcolare gli integrali

$$I_1 = \iint_{\Omega_1} xy \, dx \, dy ; \quad I_2 = \iint_{\Omega_2} xy \, dx \, dy ; \quad I_3 = \iint_{\Omega_3} xy \, dx \, dy .$$

**Esercizio 29.** Per ogni numero reale  $a > 0$  definiamo l'insieme

$$\Omega_a = [0, a] \times [0, \frac{1}{a}]$$

Calcolare in funzione di  $a$  l'integrale

$$I(a) = \iint_{\Omega_a} (x^2 + y^2) dx dy$$

Calcolare  $\sup_{a>0} I(a)$  e  $\inf_{a>0} I(a)$ .

**Esercizio 30.** Sia  $D$  il dominio  $D = \overline{B}_2 \setminus B_1$  in  $\mathbb{R}^2$ . Quali delle affermazioni seguenti sono vere ?

(1)  $\int_D x^2 = \int_D y^2$

(2)  $\int_D xy = \int_D x^2 = \int_D y^2$

(3)  $\int_D (x - y)^2 = 2 \int_D x^2$

(4)  $\int_D (x - y)^2 = 0$

(5)  $\int_D (x + y)^2 = 2 \int_D x^2$

(6)  $\int_D (x + y)^2 = 4 \int_D x^2$

(7)  $\int_D (x^2 + y^2) = 2 \int_D x^2$

(8) Calcolare  $\int_D x^2$ .