# Integrazione su insiemi misurabili II

## Integrabilità di una funzione su un insieme limitato

**Definizione 1.** *Sia $\Omega$ un insieme limitato di $\mathbb{R}^n$ ed $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Diciamo che $F$ è integrabile su $\Omega$, se esiste un rettangolo*

$$\mathcal{R} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

*contenente $\Omega$ tale che la funzione*

$$G : \mathcal{R} \to \mathbb{R}, \qquad G(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} F(x_1, \dots, x_n) & se \quad (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \\ 0 \quad se \quad (x_1, \dots, x_n) \notin \Omega. \end{cases}$$

*sia integrabile su $\mathcal{R}$. In tal caso definiamo*

$$\int_\Omega F(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n = \int_{\mathcal{R}} G(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n.$$

Osserviamo che:

- L'integrabilità di $F$ ed il valore del suo integrale non dipendono dalla scelta del rettangolo $\mathcal{R}$.
- In dimensione due e tre si scrive spesso $\displaystyle\iint_\Omega$ e $\displaystyle\iiint_\Omega$ al posto di $\displaystyle\int_\Omega$
- Si usa anche la notazione
$$\int_\Omega F(X)\, dX = \int_\Omega F(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n \;;$$
in questo caso è sottinteso che $X = (x_1, \dots, x_n)$ è la variabile in $\mathbb{R}^n$.

---

## Funzioni continue su insiemi misurabili

**Lemma 2.** *Siano $\Omega$ un insieme limitato in $\mathbb{R}^d$ e $\mathcal{N}$ un insieme di misura nulla in $\mathbb{R}^d$. Sia*

$$\mathcal{F} : \Omega \cup \mathcal{N} \to \mathbb{R}$$

*una funzione limitata su $\Omega \cup \mathcal{N}$. Allora, sono equivalenti:*

(i) *$F$ è integrabile su $\Omega$;*

(ii) *$F$ è integrabile su $\Omega \cup \mathcal{N}$.*

*Inoltre, si ha che* $\displaystyle\int_\Omega F(X)\, dX = \int_{\Omega \cup \mathcal{N}} F(X)\, dX.$

**Teorema 3.** *Sia $D$ un insieme limitato e misurabile in $\mathbb{R}^d$; indicheremo con $\mathrm{int}(D)$ la parte interna di $D$. Allora, ogni funzione $F : D \to \mathbb{R}$, continua e limitata su $\mathrm{int}(D)$, è integrabile su $D$.*

*Dimostrazione.* Basta dimostrare che $F$ è integrabile su

$$\Omega := \mathrm{int}(D).$$

Sia $\mathcal{R}$ un rettangolo limitato contenente al suo interno la chiusura $\overline{D}$. Fissiamo $\varepsilon > 0$.

Siccome $D$ è misurabile, lo è anche $\Omega$. Allora esiste una partizione $\mathcal{P}$ di $\mathcal{R}$ tale che

$$\Big( \sum_{R_{ij} \in \mathcal{P}} |R_{ij}| \sup_{R_{ij}} \chi_\Omega \Big) - \Big( \sum_{R_{ij} \in \mathcal{P}} |R_{ij}| \inf_{R_{ij}} \chi_\Omega \Big) \leq \varepsilon.$$

Dividiamo i rettangoli di $\mathcal{P}$ in due gruppi $\mathcal{P}'$ e $\mathcal{P}''$. Preso un rettangolo $R_{ij} \in \mathcal{P}$, consideriamo due casi.

- Diciamo che $R_{ij} \in \mathcal{P}'$, se $\sup_{R_{ij}} \chi_\Omega - \inf_{R_{ij}} \chi_\Omega = 0$. In questo caso, abbiamo che:
$$R_{ij} \subset \Omega \qquad \text{oppure} \qquad R_{ij} \cap \Omega = \emptyset.$$

- Diciamo che $R_{ij}\in\mathcal{P}''$, se $\sup\limits_{R_{ij}}\chi_\Omega-\inf\limits_{R_{ij}}\chi_\Omega=1$. Allora, per costruzione, abbiamo che

$$\sum_{R_{ij}\in\mathcal{P}''}|R_{ij}|=\Big(\sum_{R_{ij}\in\mathcal{P}}|R_{ij}|\sup_{R_{ij}}\chi_\Omega\Big)-\Big(\sum_{R_{ij}\in\mathcal{P}}|R_{ij}|\inf_{R_{ij}}\chi_\Omega\Big)\le\varepsilon.$$

Consideriamo ora l'insieme

$$K=\bigcup_{R_{ij}\in\mathcal{P}',\,R_{ij}\subset\Omega}R_{ij}.$$

Siccome ciascun $R_{ij}$ è compatto, abbiamo che anche $K$ è compatto. Inoltre, $K$ è contenuto in $\Omega$ e di conseguenza, la funzione $F:K\to\mathbb{R}$ è continua. Ora, per il teorema di Cantor, esiste $\delta>0$ tale che:

$$\text{Se}\quad X,Y\in K\quad\text{e}\quad |X-Y|\le\delta\,,\quad\text{allora}\quad |F(X)-F(Y)|<\varepsilon.$$

Consideriamo ora una partizione $\mathcal{Q}$,

più fine di $\mathcal{P}$,

fatta di rettangoli di diametro che non supera $\delta$. Definiamo ora le famiglie $\mathcal{Q}'$ e $\mathcal{Q}''$ come segue.

Dato $R_{ij}\in\mathcal{Q}$:

- diciamo che $R_{ij}\in\mathcal{Q}'$, se $R_{ij}$ è contenuto in un rettangolo della famiglia $\mathcal{P}'$. In particolare, si ha

  $$\sup_{R_{ij}}\chi_\Omega-\inf_{R_{ij}}\chi_\Omega=0,$$

  e si hanno quindi due casi

  $$R_{ij}\subset\Omega\qquad\text{oppure}\qquad R_{ij}\cap\Omega=\emptyset.$$

  In particolare,

  $$|F(X)-F(Y)|\le\varepsilon\qquad\text{per ogni}\qquad X,Y\in R_{ij}\,;$$

- diciamo che $R_{ij}\in\mathcal{Q}''$, se $R_{ij}$ è contenuto in un rettangolo della famiglia $\mathcal{P}''$. In particolare, sommando su tutti i rettangoli

  $$\sum_{R_{ij}\in\mathcal{Q}''}|R_{ij}|=\sum_{R_{ij}\in\mathcal{P}''}|R_{ij}|\le\varepsilon.$$

Possiamo quindi applicare il terzo dei criteri di integrabilità. □

---

## Funzioni continue su domini normali

**Corollario 4.** *Siano*

$$u:[a,b]\to\mathbb{R}\qquad e\qquad v:[a,b]\to\mathbb{R}\,,$$

*due funzioni continue su* $[a,b]$ *e tali che*

$$u(x)\le v(x)\quad\textit{per ogni}\quad x\in[a,b].$$

*Sia $D$ il dominio normale determinato dalle funzioni $u$ e $v$.*

$$D=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ a\le x\le b,\ u(x)\le y\le v(x)\Big\}.$$

*Allora, ogni funzione* $F:\mathrm{int}(D)\to\mathbb{R}$, *continua e limitata su* $\mathrm{int}(D)$, *è integrabile su* $\mathrm{int}(D)$.

**Corollario 5.** *Sia*

$$\mathcal{R}=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_{n-1},b_{n-1}]$$

*un rettangolo in* $\mathbb{R}^{n-1}$ *e siano*

$$u:\mathcal{R}\to\mathbb{R}\quad e\quad v:\mathcal{R}\to\mathbb{R}$$

*due funzioni continue tali che*

$$u(x_1,\dots,x_{n-1})\le v(x_1,\dots,x_{n-1})\quad\textit{per ogni}\quad (x_1,\dots,x_{n-1})\in\mathcal{R}.$$

*Sia $D$ il dominio normale determinato dalle funzioni $u$ e $v$,*

$$D:=\Big\{(x_1,\dots,x_{n-1},x_n)\in\mathbb{R}^n\ :\ (x_1,\dots,x_{n-1})\in\mathcal{R},\ u(x_1,\dots,x_{n-1})\le x_n\le v(x_1,\dots,x_{n-1})\Big\}.$$

*Allora, ogni funzione* $F:\mathrm{int}(D)\to\mathbb{R}$, *continua e limitata su* $\mathrm{int}(D)$, *è integrabile su* $\mathrm{int}(D)$.