# Domini normali

## Domini normali in $\mathbb{R}^2$

Siano $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato e

$$u : [a,b] \to \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad v : [a,b] \to \mathbb{R},$$

due funzioni continue tali che:

$$u(x) \le v(x) \qquad \text{per ogni} \qquad x \in [a,b].$$

**Definizione 1.** Il **dominio normale** determinato dalle funzioni $u$ e $v$ è l'insieme chiuso e limitato

$$D = \Big\{(x,y) \ : \ x \in [a,b],\ u(x) \le y \le v(x)\Big\}.$$

Inoltre, se abbiamo che

$$u(x) < v(x) \qquad \text{per ogni} \qquad x \in (a,b),$$

diremo che il dominio $D$ è un **dominio normale semplice** (determinato dalle funzioni $u$ e $v$).
Diciamo che un dominio normale semplice è di classe $C^1$, se le funzioni $u$ e $v$ sono di classe $C^1$ su $[a,b]$.

## La frontiera di un dominio normale semplice

**Proposizione 2.** *Siano $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato e*

$$u : [a,b] \to \mathbb{R} \qquad e \qquad v : [a,b] \to \mathbb{R},$$

*due funzioni continue tali che:*

$$u(x) \le v(x) \qquad \textit{per ogni} \qquad x \in [a,b].$$

*Sia $D$ il dominio normale determinato dalle funzioni $u$ e $v$. Supponiamo che $D$ sia semplice, ovvero*

$$u(x) < v(x) \qquad \textit{per ogni} \qquad x \in (a,b).$$

*Allora, la frontiera di $D$ è data da:*

$$\begin{aligned}
\partial D = &\Big\{(x, v(x)) \ : \ x \in [a,b]\Big\} \qquad (\textit{il grafico di } v) \\
&\cup \Big\{(x, u(x)) \ : \ x \in [a,b]\Big\} \qquad (\textit{il grafico di } u) \\
&\cup \Big\{(a, y) \ : \ y \in [u(a), v(a)]\Big\} \qquad (\textit{il lato verticale sinistro}) \\
&\cup \Big\{(b, y) \ : \ y \in [u(b), v(b)]\Big\} \qquad (\textit{il lato verticale destro})
\end{aligned}$$

## Parte interna di un dominio normale semplice

**Proposizione 3.** *Siano $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato e*

$$u : [a,b] \to \mathbb{R} \qquad e \qquad v : [a,b] \to \mathbb{R},$$

*due funzioni continue tali che:*

$$u(x) \le v(x) \qquad \textit{per ogni} \qquad x \in [a,b].$$

*Sia $D$ il dominio normale determinato dalle funzioni $u$ e $v$ e sia $\Omega$ l'insieme*

$$\Omega = \Big\{(x,y) \ : \ x \in (a,b),\ u(x) < y < v(x)\Big\}.$$

*Supponiamo, inoltre, che $D$ sia semplice, ovvero che vale la disuguaglianza*

$$u(x) < v(x) \qquad \textit{per ogni} \qquad x \in (a,b).$$

*Allora:*

(i) $\overline{\Omega} = D$;

(ii) $\Omega$ *è un aperto connesso per archi;*
(iii) $\Omega$ *è la parte interna di* $D$, $\mathrm{int}(D) = \Omega$*;*
(iv) *le frontiere di* $\Omega$ *e di* $D$ *coincidono.*

**Osservazione 4.** *Sia* $D$ *un dominio normale (determinato da due funzioni continue* $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$*) e sia*

$$\Omega = \Big\{(x, y) \ : \ x \in (a, b),\ u(x) < y < v(x)\Big\}.$$

*È sempre vero che* $\Omega$ *è la parte interna di* $D$*. D'altra parte, se* $D$ *non è un dominio normale semplice, allora la chiusura di* $\Omega$ *potrebbe non coincidere con* $D$*; ed anche le frontiere* $\partial D$ *e* $\partial\Omega$ *potrebbero essere diverse.*
*Per esempio, se consideriamo l'intervallo* $[-1, 1]$ *e le funzioni*

$$u : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad u(x) = 0 \ \ \textit{per ogni} \ \ x \ ;$$

$$v : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad v(x) = \begin{cases} 0 & \textit{se} \ \ x \leq 0 \\ x & \textit{se} \ \ x \geq 0 \ ; \end{cases}$$

*allora:*

(a) *l'insieme aperto* $\Omega$ *è dato da*

$$\Omega = \Big\{(x, y) \ : \ 0 < x < 1,\ 0 < y < x\Big\}.$$

(b) *la chiusura* $\overline{\Omega}$ *è data da*

$$\overline{\Omega} = \Big\{(x, y) \ : \ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\Big\}.$$

(c) *la frontiera* $\partial\Omega$ *è data da*

$$\partial\Omega = \Big\{(x, 0) \ : \ 0 \leq x \leq 1\Big\} \cup \Big\{(0, y) \ : \ 0 \leq y \leq 1\Big\} \cup \Big\{(x, x) \ : \ 0 \leq x \leq 1\Big\}.$$

(d) *il dominio normale* $D$ *è dato da*

$$D = \Big\{(x, y) \ : \ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\Big\} \bigcup \Big\{(x, y) \ : \ -1 \leq x \leq 0,\ y = 0\Big\}.$$

(e) *la frontiera* $\partial D$ *è data da*

$$\partial D = \partial\Omega \cup \Big\{(x, 0) \ : \ -1 \leq x \leq 0\Big\}.$$