
Funzioni integrabili secondo Riemann

ESERCIZI

Esercizio 1. Consideriamo la funzione

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Dimostrare che la funzione F è integrabile sul rettangolo $[0, 1] \times [0, 1]$.

Esercizio 2. Consideriamo la funzione

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 2y, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dimostrare che la funzione F è integrabile sul rettangolo $[0, 2] \times [0, 1]$.

Esercizio 3. Consideriamo la funzione

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y \leq \frac{x}{2}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dimostrare che la funzione F è integrabile sul rettangolo $\mathcal{R} := [0, 2] \times [0, 1]$. Calcolare l'integrale

$$\iint_{\mathcal{R}} F(x, y) dx dy.$$

Esercizio 4. Consideriamo la funzione

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Mostrare che la funzione F non è integrabile sul rettangolo $\mathcal{R} := [0, 1] \times [0, 1]$.

Esercizio 5. Consideriamo la funzione

$$F(x, y) = \begin{cases} \sin(1/x) \sin(1/y) & \text{se } x > 0, y > 0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Mostrare che la funzione F è integrabile sul rettangolo $\mathcal{R} := [0, 1] \times [0, 1]$.