1-forme chiuse in aperti semplicemente connessi

Una condizione necessaria e sufficiente

Lemma 1. *Sia Ω un aperto connesso di $\mathbb{R}^d$ e sia α una 1-forma di classe C^0 su Ω. Allora, sono equivalenti:*

(1) *α è esatta;*

(2) *Per ogni curva chiusa C^1 a tratti $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$ si ha che $\displaystyle\int_\gamma \alpha = 0$;*

(3) *Se $\gamma : [a, b] \to \Omega$ e $\sigma : [A, B] \to \Omega$ sono due curve C^1 a tratti tali che:*

$$\gamma(a) = \sigma(A) \qquad e \qquad \gamma(b) = \sigma(B),$$

allora $\displaystyle\int_\gamma \alpha = \int_\sigma \alpha$.

Curve omotope

Definizione 2 (Curve omotope con gli stessi estremi)**.** *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$. Siano*

$$\gamma : [a, b] \to \Omega \qquad e \qquad \sigma : [a, b] \to \Omega$$

due curve continue e tali che

$$\gamma(a) = \sigma(a) \qquad e \qquad \gamma(b) = \sigma(b).$$

Diciamo che γ e σ sono **omotope** *se esiste (un intervallo $[c, d]$ e) una funzione continua*

$$H : [a, b] \times [c, d] \to \Omega$$

tale che

$$\begin{cases} H(t, c) = \gamma(t) & \textit{per ogni} \quad t \in [a, b] \\ H(t, d) = \sigma(t) & \textit{per ogni} \quad t \in [a, b]. \end{cases}$$

Integrazione di 1-forme su curve omotope

Teorema 3. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e*

$$\gamma : [a, b] \to \Omega \qquad e \qquad \sigma : [a, b] \to \Omega$$

due curve C^1 a tratti con gli stessi estremi:

$$\gamma(a) = \sigma(a) \qquad e \qquad \gamma(b) = \sigma(b).$$

Sia α una 1-forma chiusa su Ω. Se γ e σ sono omotope, allora

$$\int_\gamma \alpha = \int_\sigma \alpha.$$

Dimostrazione : Sia H una funzione continua

$$H : [a, b] \times [c, d] \to \Omega$$

tale che

$$\begin{cases} H(t, c) = \gamma(t) & \text{per ogni} \quad t \in [a, b] \\ H(t, d) = \sigma(t) & \text{per ogni} \quad t \in [a, b]. \end{cases}.$$

Osserviamo che l'insieme $\mathcal{K} := \{H(t, s) \ : \ t \in [a, b], \ s \in [c, d]\}$ è un compatto contenuto in Ω.

Step 1. Esiste un ricoprimento finito $\Big\{B_{r_k}(x_i)\Big\}_{k=1}^N$ di $\mathcal{K}$ tale che:

- $x_k \in \mathcal{K}$ per ogni k;
- $B_{4r_k}(x_k) \subset \Omega$ per ogni k.

Definiamo

$$r = \min_{1 \le k \le N} r_k.$$

Step 2. Esiste un ricoprimento finito $\Big\{B_r(y_k)\Big\}_{k=1}^{M}$ di $\mathcal{K}$ tale che:

- $y_k \in \mathcal{K}$ per ogni k;
- $B_{2r}(y_k) \subset \Omega$ per ogni k.

Infatti, per ogni $y \in \mathcal{K}$, y appartiene a una delle palle $B_{r_k}(x_k)$ del ricoprimento del punto precedente. Ma allora $B_{2r_k}(y)$ è un sottoinsieme di $B_{4r_k}(x_k)$ (perché?). Di conseguenza, $B_{2r_k}(y) \subset \Omega$. Siccome $r \le r_k$, abbiamo che

$$B_{2r}(y) \subset \Omega \quad \text{per ogni} \quad y \in \mathcal{K}.$$

La famiglia $\Big\{B_r(y)\Big\}_{y \in \mathcal{K}}$ è un ricoprimento di $\mathcal{K}$. Siccome $\mathcal{K}$ è compatto, questo ricoprimento contiene un sottoricoprimento finito, il che conclude la dimostrazione di *Step 2.*

Step 3. Fissati due naturali m e n, consideriamo le (equi-)partizioni

$$\mathcal{P}_{[a,b]} = \Big\{a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b\Big\}$$

$$\mathcal{P}_{[c,d]} = \Big\{c = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_m = d\Big\}$$

dove

$$t_i = a + i\frac{b-a}{n} \quad \text{per ogni} \quad 0 \le i \le n.$$

$$s_j = c + j\frac{d-c}{m} \quad \text{per ogni} \quad 0 \le j \le m.$$

Per ogni $1 \le i \le n$ e $1 \le j \le m$ definiamo il rettangolo

$$R_{ij} = [t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j].$$

Siccome H è uniformemente continua, scegliendo m e n abbastanza grandi abbiamo che

$$|H(t,s) - H(t',s')| < r \quad \text{per ogni} \quad (t,s) \in R_{ij}, \quad (t',s') \in R_{ij}.$$

In particolare, per ogni coppia di indici (i,j) esiste una palla $B_r(y_k)$ del ricoprimento di Step 2 tale che

$$H(s,t) \in B_{2r}(y_k) \quad \text{per ogni} \quad (s,t) \in R_{ij}.$$

Step 4. Per ogni coppia di indici

$$0 \le i \le n-1 \qquad \text{e} \qquad 0 \le j \le m-1\,,$$

consideriamo le curve γ_{ij} e σ_{ij}

- la curva $\gamma_{ij} : [t_i, t_{i+1}] \to \Omega$ parametrizza il segmento che collega i punti
$$H(t_i, s_j) \quad \text{e} \quad H(t_{i+1}, s_j).$$
- la curva $\sigma_{ij} : [s_j, s_{j+1}] \to \Omega$ parametrizza il segmento che collega i punti
$$H(t_i, s_j) \quad \text{e} \quad H(t_i, s_{j+1}).$$

Ora, fissati i e j, per *Step 3* abbiamo che le curve

$$\gamma_{ij}\,,\ \sigma_{ij}\,,\ \gamma_{i,j+1}\,,\ \sigma_{i+1,j}$$

sono contenute in una delle palle $B_{2r}(y_k) \subset \Omega$. Siccome su $B_{2r}(y_k)$ la forma α è anche esatta, abbiamo che

$$\int_{\gamma_{i,j}} \alpha + \int_{\sigma_{i+1,j}} \alpha = \int_{\sigma_{i,j}} \alpha + \int_{\gamma_{i,j+1}} \alpha$$

Step 5. Ora, per ogni $j = 0, \ldots, m$ definiamo la curva

$$\gamma_j : [a,b] \to \Omega$$

come il concatenamento

$$\gamma_j = \gamma_{0,j} * \gamma_{1,j} * \gamma_{2,j} * \cdots * \gamma_{n-1,j}.$$

Allora

$$\int_{\gamma_j} \alpha = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\gamma_{ij}} \alpha = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\sigma_{i,j}} \alpha + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\gamma_{i,j+1}} \alpha - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\sigma_{i+1,j}} \alpha = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\gamma_{i,j+1}} \alpha = \int_{\gamma_{j+1}} \alpha.$$

Di conseguenza,

$$\int_{\gamma_0} \alpha = \int_{\gamma_m} \alpha.$$

Ora, per concludere basta osservare che

$$\int_{\gamma_0} \alpha = \int_{\gamma} \alpha \qquad \text{e} \qquad \int_{\gamma_m} \alpha = \int_{\sigma} \alpha.$$

□

1-forme chiuse su insiemi semplicemente connessi

Definizione 4. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto. Diciamo che Ω è* **semplicemente connesso** *se è connesso e se per ogni coppia di curve continue*

$$\gamma : [a, b] \to \Omega \qquad e \qquad \sigma : [a, b] \to \Omega$$

con gli stessi estremi,

$$\gamma(a) = \sigma(a) \qquad e \qquad \gamma(b) = \sigma(b),$$

si ha che γ è omotopa a σ.

Teorema 5. *Su un aperto semplicemente connesso, ogni 1-forma chiusa è esatta.*

Corollario 6. *Sia*

$$\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^3 \ , \qquad \Phi(x, y, z) = \Big(a(x, y, z),\ b(x, y, z),\ c(x, y, z)\Big)$$

un campo vettoriale di classe C^1 su un aperto semplicemente connesseo $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Se il campo Φ è irrotazionale, allora Φ è un campo conservativo, ovvero esiste un potenziale

$$P : \Omega \to \mathbb{R}$$

tale per cui $\nabla P = \Phi$.