Coomologia di de Rham

Gruppi di coomologia di De Rham

Dato un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e un $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, definiamo gli spazi delle k-forme chiuse su Ω come

$$FC_k(\Omega) = \Big\{k\text{-forme chiuse di classe } C^\infty \text{ su } \Omega\Big\}.$$

Se invece, $k \in \{1, \ldots, n\}$, definiamo anche lo spazio delle k-forme esatte su Ω come

$$FE_k(\Omega) = \Big\{k\text{-forme esatte di classe } C^\infty \text{ su } \Omega\Big\}.$$

Definizione 1. *Siano α e β due forme in $FC_k(\Omega)$. Diciamo che α e β sono equivalenti e scriviamo $\alpha \sim \beta$ se differiscono di una forma esatta, ovvero se esiste una $(k-1)-$forma γ tale che*

$$\alpha = \beta + d\gamma\,.$$

Osserviamo che:

- se $\alpha \sim \beta$, allora $\beta \sim \alpha$;
- se $\alpha \sim \beta$ e $\beta \sim \gamma$, allora $\alpha \sim \gamma$;
- se $\alpha_1 \sim \beta_1$ e $\alpha_2 \sim \beta_2$, allora $(\alpha_1 + \beta_1) \sim (\alpha_2 + \beta_2)$.

Definiamo $dR_k(\Omega)$ come l'insieme delle classi di equivalenza

$$[\alpha] = \Big\{\beta \in FC_k(\Omega)\ :\ \beta \sim \alpha\Big\}.$$

Su $dR_k(\Omega)$, possiamo definire l'operazione somma come

$$[\alpha] + [\beta] = [\alpha + \beta].$$

Con questa operazione $dR_k(\Omega)$ è un gruppo abeliano, ovvero

- $\big([\alpha] + [\beta]\big) + [\gamma] = [\alpha] + \big([\beta] + [\gamma]\big)$ per ogni $[\alpha]$, $[\beta]$, $[\gamma] \in dR_k(\Omega)$;
- $[\alpha] + [\beta] = [\beta] + [\alpha]$ per ogni $[\alpha]$, $[\beta] \in dR_k(\Omega)$;
- per ogni $[\alpha] \in dR_k(\Omega)$, abbiamo
$$[\alpha] + [0] = [0] + [\alpha] = [0].$$
- per ogni $[\alpha] \in dR_k(\Omega)$, abbiamo
$$[\alpha] + [-\alpha] = [-\alpha] + [\alpha] = [0].$$

Esempio 2. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è un aperto stellato, allora $dR_1(\Omega) = \{0\}$.*

Esempio 3. *Se $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$, allora $dR_1(\Omega) = \mathbb{R}$.*

Teorema 4. *Siano Ω_1 e Ω_2 due aperti in $\mathbb{R}^n$. Supponiamo che esiste una funzione di classe C^∞*

$$\Phi : \Omega_1 \to \Omega_2\,.$$

Allora, la mappa

$$\Phi^* : dR_k(\Omega_2) \to dR_k(\Omega_1)\ , \qquad \Phi^* : [\alpha] \mapsto [\Phi^*\alpha]$$

è ben-definita. Inoltre, se

$$\Phi : \Omega_1 \to \Omega_2 \qquad e \qquad \Psi : \Omega_2 \to \Omega_3,$$

sono due applicazioni C^∞, allora

$$(\Psi \circ \Phi)^* = \Phi^* \circ \Psi^*,$$

dove

$$\Phi^* : dR_k(\Omega_2) \to dR_k(\Omega_1) \qquad e \qquad \Psi^* : dR_k(\Omega_3) \to dR_k(\Omega_2).$$

In particolare, se Ω_1 e Ω_2 sono C^∞-diffeomorfi, allora i gruppi $dR_k(\Omega_1)$ e $dR_k(\Omega_2)$ sono isomorfi.