
 N -forme su rettangoli di \mathbb{R}^N

Teorema 1. Sia Ω un rettangolo aperto in \mathbb{R}^N e sia α una N -forma su \mathcal{R} . Allora α è esatta. In particolare,

- su un rettangolo di \mathbb{R}^2 , le 2-forme sono esatte;
- su un rettangolo di \mathbb{R}^3 , le 3-forme sono esatte.

Dimostrazione in dimensione due. Sia $N = 2$ e sia

$$a(x, y) dx \wedge dy$$

una 2-forma in \mathbb{R}^2 . Consideriamo la 1-forma

$$\varphi(x, y) dy,$$

dove

$$\varphi(x, y) = \int_0^x a(x', y) dx'.$$

Allora

$$\begin{aligned} d(\varphi(x, y) dy) &= (\partial_x \varphi dx + \partial_y \varphi dy) \wedge dy \\ &= \partial_x \varphi dx \wedge dy \\ &= a(x, y) dx \wedge dy, \end{aligned}$$

il che conclude la dimostrazione. □