Intervallo massimale di esistenza

Tempo massimale di esistenza

Teorema 1. *Siano $\Omega \in \mathbb{R}^d$ un aperto ed $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$ una funzione localmente lipschitziana su Ω. Allora, per ogni $X_0 \in \Omega$ esistono*

$$T_{max} > 0$$

ed una soluzione $X : \big[0, T_{max}\big) \to \Omega$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = F(X(t)) \quad \textit{per ogni} \quad t \in (0, T_{max}) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

con la proprietà seguente. Per ogni costante $T > 0$ e per ogni $Y : [0, T) \to \Omega$ soluzione di

$$\begin{cases} Y'(t) = F(Y(t)) \quad \textit{per ogni} \quad t \in (0, T) \\ Y(0) = X_0 \end{cases}, \tag{1}$$

si ha che

$$T \le T_{max} \quad e \quad X \equiv Y \quad su \quad [0, T).$$

Dimostrazione. La dimostrazione è una conseguenza diretta del teorema di unicità della soluzione. Definiamo

$$T_{max} := \sup \Big\{ T > 0 \ : \ \text{esiste una soluzione } Y : [0, T) \to \Omega \text{ di } (1) \Big\}.$$

Per definire la funzione X sull'intervallo $[0, T_{max})$ consideriamo un tempo fissato

$$t \in [0, T_{max}).$$

Per la definizione di T_{max} esiste una soluzione $Y : [0, T) \to \Omega$ di (1) per un qualche

$$T \in \big(t, T_{max}\big).$$

Definiamo $X(t)$ come

$$X(t) := Y(t).$$

Osserviamo che $X(t)$ non dipende dalla scelta del tempo T e dalla soluzione $Y : [0, T) \to \Omega$. Infatti, se

$$Y_1 : [0, T_1) \to \mathbb{R}^d \qquad \text{e} \qquad Y_2 : [0, T_2) \to \mathbb{R}^d$$

sono due soluzioni di

$$\begin{cases} Y_1'(t) = F(Y_1(t)) \quad \text{per ogni} \quad t \in (0, T_1) \\ Y_1(0) = X_0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} Y_2'(t) = F(Y_2(t)) \quad \text{per ogni} \quad t \in (0, T_2) \\ Y_2(0) = X_0 \end{cases},$$

tali che $T_1 > t$ e $T_2 > t$, allora per il teorema di unicità $Y_1(t) = Y_2(t)$. $\square$

Osservazione 2. *T_{max} è detto* **tempo massimale di esistenza**, *mentre la soluzione $X : [0, T_{max})$ è detta* **soluzione massimale**. *Osserviamo che dati una funzione $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$ ed un dato inziale $X_0 \in \Omega$, ci sono due possibilità :*

- *la soluzione di*

$$X' = F(X), \quad X(0) = X_0$$

  esiste per tutti i tempi (in questo caso scriviamo $T_{max} = +\infty$) ;

- la soluzione **non esiste per tutti i tempi** (in questo caso $T_{max} < +\infty$).

Esempio 3. *La soluzione del problema*

$$x'(t) = x(t), \quad x(0) = 1$$

esiste per tutti i tempi ed è data dalla funzione $x(t) = e^t$

Esempio 4. *Una soluzione del problema*

$$x'(t) = \sqrt{x(t)}, \qquad x(0) = \frac{1}{2},$$

è la funzione

$$x(t) = \frac{1}{2-t}.$$

In particolare, in questo caso, $T_{max} = 2$.

Comportamento della soluzione vicino al tempo massimale di esistenza

Teorema 5. *Siano* Ω *un aperto in* $\mathbb{R}^d$, $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *una funzione localmente lipschitziana su* Ω *e* $X_0 \in \Omega$ *un dato iniziale. Se l'intervallo massimale di esistenza della soluzione di*

$$X'(t) = F(X(t)), \qquad X(0) = X_0$$

è finito: $T_{max} < +\infty$, *allora si verifica uno dei due casi seguenti:*

(i) *esiste una successione (crescente)* $t_n \to T_{max}$ *tale che*

$$\lim_{n\to+\infty} |X(t_n)| = +\infty \ ;$$

(ii) *esiste una successione (crescente)* $t_n \to T_{max}$ *tale che*

$$\textit{la successione} \quad X(t_n) \quad \textit{converge ad un certo} \quad X_\infty \in \partial\Omega.$$

Dimostrazione. Sia t_n una successione crescente che converge a $T_{max} < +\infty$. Se (i) non vale, allora (a meno di estrarre una sottosuccessione) la successione $X(t_n)$ converge ad un certo $X_\infty \in \overline{\Omega}$.

Supponiamo per assurdo che $X_\infty \notin \partial\Omega$. Allora necessariamente $X_\infty \in \mathrm{int}(\Omega)$. Quindi possiamo trovare una costante $\delta > 0$ tale che

$$B_{3\delta}(X_0) \subset \Omega.$$

Sia L la costante di Lipschitz di F in $B_{2\delta}(X_\infty)$. Osserviamo che siccome $X(t_n) \to X_\infty$ e siccome la funzione F è continua, abbiamo che per n abbastanza grande

$$|F(X(t_n))| \le |F(X_\infty)| + 1 \qquad \text{e} \qquad X(t_n) \in B_\delta(X_\infty).$$

Ora, fissiamo una costante $T_0 > 0$ tale che

$$T_0 \le \big(|F(X_\infty)| + 1 + \delta L\big)\delta \qquad \text{e} \qquad T_0 \le \frac{1}{L}.$$

In particolare, per ogni n, possiamo estendere la soluzione di

$$X' = F(X)$$

sull'intervallo $[0, t_n + T_0)$. Per n abbsastanza grande, abbiamo che $t_n + T_0 > T_{max}$ in contraddizione con la definizione di intervallo massimale di esistenza. $\square$