Unicità delle soluzioni

Teorema 1. *Siano* Ω *un insieme aperto in* $\mathbb{R}^d$, $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *una funzione localmente lipschitziana in* Ω *e* $X_0 \in \Omega$ *un punto (dato iniziale) fissato. Supponiamo che*

$$X : [0,T) \to \mathbb{R}^d \qquad e \qquad Y : [0,T) \to \mathbb{R}^d$$

siano due soluzioni di

$$\begin{cases} X'(t) = F(X(t)) & \textit{per ogni} \quad t \in (0,T) \\ X(0) = X_0 \end{cases} \qquad e \qquad \begin{cases} Y'(t) = F(Y(t)) & \textit{per ogni} \quad t \in (0,T) \\ Y(0) = X_0 \end{cases}$$

Allora

$$X(t) = Y(t) \quad \textit{per ogni} \quad t \in (0,T).$$

Dimostrazione: Sia $S \geq 0$ il più grande numero reale in $[0,T)$ tale che

$$X(t) = Y(t) \quad \text{per ogni} \quad t \in [0,S).$$

Dimostreremo che $S = T$. Supponiamo per assurdo che $S < T$.
Per la continuità di X e di Y abbiamo che

$$X(S) = Y(S).$$

Sia $r > 0$ un raggio tale che

$$\overline{B}_r(X(S)) \subset \Omega.$$

Usando di nuovo la continuità di X e di Y, otteniamo che esiste $\delta > 0$ (abbastanza piccolo, tale che $S < S + \delta < T$) tale per cui

$$X(t) \in B_r(X(S)) \quad \text{e} \quad Y(t) \in B_r(X(S)) \quad \text{per ogni} \quad t \in [S, S+\delta].$$

Consideriamo la funzione

$$f(t) = |X(t) - Y(t)|^2 \quad \text{per ogni} \quad t \in [S, S+\delta).$$

Calcoliamo la derivata

$$\begin{aligned} f'(t) &= \partial_t\big[|X(t) - Y(t)|^2\big] \\ &= 2\big(X'(t) - Y'(t)\big) \cdot \big(X(t) - Y(t)\big) \\ &= 2\big(F(X(t)) - F(Y(t))\big) \cdot \big(X(t) - Y(t)\big). \end{aligned}$$

Ora, siccome

$$X(t) \in B_r(X(S)),\ Y(t) \in B_r(X(S)) \text{ e siccome } F \text{ è } L\text{-Lipschitz in } B_r(X(S)),$$

per un qualche $L > 0$, abbiamo che

$$\big|F(X(t)) - F(Y(t))\big| \leq L|X(t) - Y(t)| \quad \text{per ogni} \quad t \in [S, S+\delta).$$

Di conseguenza,

$$f'(t) \leq 2Lf(t).$$

e quindi

$$\partial_t\Big(f(t)e^{-2Lt}\Big) \leq 0.$$

In particolare, $f(t)e^{-Lt} \leq f(0) = 0$ e dunque

$$f(t) = 0 \quad \text{per ogni} \quad t \in [S, S+\delta].$$

In conclusione, otteniamo che $S = T$. □

Corollario 2. *Siano* Ω *un insieme aperto in* $\mathbb{R}^d$, $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *una funzione di classe* C^1 *in* Ω *e* $X_0 \in \Omega$ *un punto (dato iniziale) tale che* $F(X_0) = 0$. *Se*

$$X : [0, T) \to \mathbb{R}^d$$

è una soluzione di

$$\begin{cases} X'(t) = F(X(t)) \quad \textit{per ogni} \quad t \in (0, T) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

allora

$$X(t) \equiv X_0 \quad \textit{per ogni} \quad t \geq 0.$$

Diciamo che X_0 *è un* **punto stazionario** *o anche* **punto di equilibrio** *per il problema* $X' = F(X)$.

Corollario 3. *Siano* Ω *un aperto in* $\mathbb{R}^d$, $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *una funzione di classe* C^1 *in* Ω *e* $X_0 \in \Omega$. *Sia* $X : [0, T) \to \mathbb{R}^d$ *una soluzione di*

$$\begin{cases} X'(t) = F(X(t)) \quad \textit{per ogni} \quad t \in (0, T) \\ X(0) = X_0. \end{cases}$$

Se X_0 *non è stazionario, allora il sostegno della curva* X *non contiene punti stazionari, ovvero*

$$F(X(t)) \neq 0 \quad \textit{per ogni} \quad t \in [0, T).$$