Teorema di Cauchy-Lipschitz

Equazioni differenziali ordinarie e problema di Cauchy

Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$, $X_0 \in \mathbb{R}^d$ e $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$ una funzione continua. Sia $T > 0$ un numero reale oppure $T = +\infty$. Diciamo che la funzione $X : [0, T) \to \mathbb{R}^d$ è soluzione del **problema di Cauchy**

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X), \\ X(0) = X_0, \end{cases} \tag{1}$$

se:

- X è differenziabile (e quindi anche continua) su $[0, T)$ e $X(0) = X_0$;
- per ogni $t \in [0, T)$ abbiamo $X'(t) = F(X(t))$.

Scrivendo

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_d(t) \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad F(X) = \begin{pmatrix} F_1(X) \\ F_2(X) \\ \vdots \\ F_d(X) \end{pmatrix}$$

possiamo scrivere l'**equazione differenziale ordinaria** $X' = F(X)$ come un sistema

$$\begin{cases} x_1'(t) = F_1\big(x_1(t), \dots, x_d(t)\big) \\ x_2'(t) = F_2\big(x_1(t), \dots, x_d(t)\big) \\ \vdots \\ x_d'(t) = F_d\big(x_1(t), \dots, x_d(t)\big) \end{cases}$$

Equazioni differenziali ordinarie - formulazione integrale

Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$, $X_0 = (x_0^1, \dots, x_0^d) \in \Omega$ ed $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$ una funzione continua. Supponiamo che

$$X : [0, T) \to \Omega\ , \qquad X(t) = \big(x_1(t),\, x_2(t), \dots,\, x_d(t)\big),$$

sia una funzione continua su $[0, T)$ tale che

$$x_j(t) = x_0^j + \int_0^t F_j\big(x_1(s), \dots, x_d(s)\big)\, ds \quad \text{per ogni} \quad t \in [0, T) \quad \text{e per ogni} \quad j = 1, \dots, d\,,$$

che scriveremo in forma compatta come

$$X(t) = X_0 + \int_0^t F\big(X(s)\big)\, ds \quad \text{per ogni} \quad t \in [0, T).$$

Allora $X(0) = X_0$. Inoltre, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, ogni componente di X è derivabile su $[0, T)$ e la sua derivata è data da

$$X'(t) = F\big(X(t)\big) \quad \text{per ogni} \quad t \in [0, T).$$

Quindi, la funzione $X : [0, T) \to \mathbb{R}^d$ è soluzione del problema di Cauchy (1).

Più in generale, se $T_1 > 0$, $T_2 > 0$ e se esiste una funzione continua

$$X : (-T_1, T_2) \to \Omega$$

tale che

$$X(t) = X_0 + \int_0^t F\big(X(s)\big)\, ds \quad \text{per ogni} \quad t \in (-T_1, T_2),$$

allora

$$\begin{cases} X'(t) = F(X(t)) \quad \text{per ogni} \quad t \in (-T_1, T_2), \\ X(0) = X_0. \end{cases}$$

Definizione 1. *Sia* Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^d$*. Data una funzione*

$$F : \Omega \to \mathbb{R}^d,$$

diciamo che F *è* **localmente Lipschitziana** *su* Ω*, se:*

$$\textit{per ogni} \quad X_0 \in \Omega \quad \textit{esistono} \quad r > 0 \quad \textit{e} \quad L > 0 \quad \textit{tali che}$$

$$|F(X) - F(Y)| \leq L|X - Y| \quad \textit{per ogni} \quad X, Y \in B_r(X_0) \cap \Omega.$$

Teorema 2. *Sia* Ω *un aperto in* $\mathbb{R}^d$ *e sia* $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *una funzione localmente Lipschitziana su* Ω*. Allora, per ogni* X_0 *esistono* $T > 0$ *è una funzione*

$$X : [-T, T] \to \Omega$$

continua e derivabile su $[-T, T]$ *e tale che*

$$\begin{cases} X'(t) = F(X(t)) \quad \textit{per ogni} \quad t \in [0, T], \\ X(0) = X_0. \end{cases}$$

Dimostrazione: Dimostreremo che esiste una soluzione del problema nella sua formulazione integrale, ovvero mostreremo che esistono $T > 0$ ed una funzione continua

$$X : [-T, T] \to \Omega$$

tale che

$$X(t) = X_0 + \int_0^t F\big(X(s)\big)\, ds \quad \text{per ogni} \quad t \in [-T, T],$$

dove ricordiamo che per $t < 0$

$$\int_0^t F\big(X(s)\big)\, ds := -\int_t^0 F\big(X(s)\big)\, ds.$$

Step 1. *La succesione.* Siano $r > 0$ e $L > 0$ tali che $\overline{B}_r(X_0) \subset \Omega$ e

$$|F(X) - F(Y)| \leq L|X - Y| \quad \text{per ogni} \quad X, Y \in \overline{B}_r(X_0).$$

Fissiamo un $T > 0$ che sceglieremo in seguito. Definiamo la seguente successione di funzioni continue:

- X_0 è la funzione costante:

$$X_0(t) = X_0 \quad \text{per ogni} \quad t \in [-T, T].$$

- $X_{n+1} : [-T, T] \to \mathbb{R}$ è definita come

$$X_{n+1}(t) = X_0 + \int_0^t F(X_n(s))\, ds \quad \text{per ogni} \quad s \in [-T, T].$$

Step 2. *La buona definizione.* Per essere certi che la successione di funzioni sia ben definita bisogna verificare che ad ogni passo abbiamo

$$X_n(s) \in \Omega \quad \text{per ogni} \quad s \in [-T, T].$$

Infatti, per definire X_{n+1}, bisogna avere che $F(X_n(s))$ sia definita per ogni $s \in [-T,T]$. Osserviamo che, per ogni $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}|X_n(t)-X_0| &\le \int_0^t |F(X_{n-1}(s))|\,ds\\ &\le \int_0^t \big(|F(X_0)|+Lr\big)\,ds \le t\big(|F(X_0)|+Lr\big) \le T\big(|F(X_0)|+Lr\big).\end{aligned}$$

Analogamente, per ogni $t \in [-T,0]$,

$$\begin{aligned}|X_n(t)-X_0| &\le \int_t^0 |F(X_{n-1}(s))|\,ds\\ &\le \int_t^0 \big(|F(X_0)|+Lr\big)\,ds \le |t|\big(|F(X_0)|+Lr\big) \le T\big(|F(X_0)|+Lr\big).\end{aligned}$$

Scegliendo T (in funzione di L, r e $|F(X_0)|$) tale che

$$T\big(|F(X_0)|+Lr\big) \le r,$$

abbiamo che se

$$|X_{n-1}(t)| \le r \quad \text{per ogni} \quad t \in [-T,T],$$

allora anche

$$|X_n(t)| \le r \quad \text{per ogni} \quad t \in [-T,T].$$

Step 3. *La distanza fra X_{n+1} e X_n.* Per ogni $t \in [0,T]$ stimiamo

$$\begin{aligned}|X_{n+1}(t)-X_n(t)| &\le \left|\int_0^t F(X_n(s))\,ds - \int_0^t F(X_{n-1}(s))|\,ds\right|\\ &\le \int_0^t \big|F(X_n(s)) - F(X_{n-1}(s))\big|\,ds\\ &\le \int_0^t L\big|X_n(s)-X_{n-1}(s)\big|\,ds\\ &\le \int_0^t L\|X_n - X_{n-1}\|_\infty\,ds \le tL\|X_n-X_{n-1}\|_\infty \le TL\|X_n-X_{n-1}\|_\infty\ .\end{aligned}$$

Analogamente, per $t \in [-T,0]$

$$\begin{aligned}|X_{n+1}(t)-X_n(t)| &\le \left|\int_t^0 F(X_n(s))\,ds - \int_0^t F(X_{n-1}(s))|\,ds\right|\\ &\le \int_t^0 \big|F(X_n(s)) - F(X_{n-1}(s))\big|\,ds\\ &\le \int_t^0 L\big|X_n(s)-X_{n-1}(s)\big|\,ds\\ &\le \int_t^0 L\|X_n - X_{n-1}\|_\infty\,ds \le |t|L\|X_n-X_{n-1}\|_\infty \le TL\|X_n-X_{n-1}\|_\infty\ .\end{aligned}$$

In conclusione

$$|X_{n+1}(t)-X_n(t)| \le TL\|X_n-X_{n-1}\|_\infty \quad \text{per ogni} \quad t \in [-T,T].$$

Ora, siccome la disuguaglianza vale per ogni $t \in [-T,T]$, abbiamo

$$\|X_{n+1}-X_n\|_\infty = \sup_{t\in[-T,T]} |X_{n+1}(t)-X_n(t)| \le TL\|X_n-X_{n-1}\|_\infty.$$

Iterando la stima, otteniamo che

$$\|X_{n+1}-X_n\|_\infty \le (TL)^n\|X_1-X_0\|_\infty.$$

Scegliendo T tale che

$$LT < 1,$$

abbiamo che la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|X_{n+1} - X_n\|_\infty$$

converge. Di conseguenza, la successione

$$X_n : [-T, T] \to \mathbb{R}^d$$

converge uniformemente ad una certa funzione continua

$$X : [-T, T] \to \mathbb{R}^d.$$

Step 4. *Conclusione.* Come conseguenza della convergenza uniforme, abbiamo che

$$\lim_{n\to\infty} X_n(t) = X(t) \quad \text{per ogni} \quad t \in [-T, T],$$

e quindi

$$|X(t) - X_0| = \lim_{n\to\infty} |X_n(t) - X_0| \le r \quad \text{per ogni} \quad t \in [-T, T].$$

In particolare,

$$X(t) \in \overline{B}_r(X_0) \subset \Omega \quad \text{per ogni} \quad t \in [-T, T].$$

Ora, consideriamo l'identità

$$X_{n+1}(t) = X_0 + \int_0^t F(X_n(s))\,ds.$$

Passando al limite per $n \to \infty$, otteniamo che

$$\lim_{n\to\infty} X_{n+1}(t) = X(t).$$

D'altra parte, quando $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}
\left| X_0 + \int_0^t F(X_n(s))\,ds - \Big(X_0 + \int_0^t F(X(s))\,ds\Big)\right| &= \left|\int_0^t F(X_n(s))\,ds - \int_0^t F(X(s))\,ds\right| \\
&\le \int_0^t \big|F(X_n(s)) - F(X(s))\big|\,ds \\
&\le \int_0^t L\big|X_n(s) - X(s)\big|\,ds \\
&\le \int_0^t L\|X_n - X\|_\infty\,ds \\
&\le tL\|X_n - X\|_\infty \le TL\|X_n - X\|_\infty.
\end{aligned}$$

Analogamente, per $t \in [-T, 0]$, si ha

$$\left| X_0 + \int_0^t F(X_n(s))\,ds - \Big(X_0 + \int_0^t F(X(s))\,ds\Big)\right| \le TL\|X_n - X\|_\infty \,.$$

Ora, siccome $\|X_n - X\|_\infty \to 0$, abbiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \left(X_0 + \int_0^t F(X_n(s))\,ds\right) = X_0 + \int_0^t F(X(s))\,ds.$$

Di conseguenza,

$$X(t) = X_0 + \int_0^t F(X(s))\,ds. \qquad \square$$