Massimi e minimi relativi e derivate direzionali seconde

Condizione sufficiente per minimi relativi

Abbiamo dimostrato il teorema seguente.

Teorema 1. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ e sia $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 su Ω. Se il punto $X_0 \in \Omega$ è un punto tale che:*

- *X_0 è un punto critico (ovvero $\nabla F(X_0) = 0$);*
- *la matrice $\nabla^2 F(X_0)$ è definita positiva;*

allora X_0 è un punto di minimo relativo per la funzione $F : \Omega \to \mathbb{R}$.

Una dimostrazione sbagliata del Teorema 1

Fissato un vettore non-nullo $V \in \mathbb{R}^d$, si possono calcolare le derivate direzionali

$$\partial_t\Big[F(X_0 + tV)\Big] = V \cdot \nabla F(X_0 + tV),$$

$$\partial_{tt}\Big[F(X_0 + tV)\Big] = V \cdot \nabla^2 F(X_0 + tV)[V].$$

In particolare, si ha la proposizione seguente.

Proposizione 2. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ e sia $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 su Ω. Se il punto $X_0 \in \Omega$ è un punto tale che:*

- *X_0 è un punto critico (ovvero $\nabla F(X_0) = 0$);*
- *la matrice $\nabla^2 F(X_0)$ è definita positiva;*

allora per ogni vettore non-nullo $V \in \mathbb{R}^d$ si ha che

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(X_0 + tV) = 0 \qquad e \qquad \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} F(X_0 + tV) = V \cdot \nabla^2 F(X_0)[V] > 0.$$

Uno potrebbe cercare di dimostrare il Teorema 1 combinando la Proposizione 2 con la proposizione seguente.

Proposizione 3. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ e sia $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione con la proprietà seguente. Per ogni vettore non-nullo $V \in \mathbb{R}^d$ si ha che la funzione*

$$t \mapsto F(X_0 + tV)$$

è di classe C^2 dove è definita e si ha che

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(X_0 + tV) = 0 \qquad e \qquad \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} F(X_0 + tV) > 0.$$

Allora, X_0 è un punto di minimo relativo per F.

Questa proposizione (Proposizione 3) in generale è falsa!
Diventa invece vera se si assume che F sia di classe C^2 su Ω!

Esempio

Costruiremo una funzione
$$G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
con le proprietà seguenti.

- Per ogni vettore non-nullo $V \in \mathbb{R}^d$ si ha che la funzione
$$t \mapsto G(X_0 + tV)$$
è derivabile infinite volte e si ha che
$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} G(X_0 + tV) = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} G(X_0 + tV) > 0.$$
In particolare, la funzione
$$G_V : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad G_V(t) = G(X_0 + tV),$$
ha un minimo relativo in $t = 0$.

- La funzione $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ **non ha un minimo relativo in** $(0, 0)$.

Useremo il lemma seguente.

Lemma 4. *Consideriamo la funzione*
$$F(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{se} \quad (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 \quad \text{se} & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$
Allora, per ogni vettore non-nullo
$$V = (a, b) \neq (0, 0) \in \mathbb{R}^2$$
si ha che
$$F_V(t) = \frac{tab^2}{a^2 + t^2 b^4}.$$
In particolare,
$$F_V(0) = 0 \ , \qquad F_V'(0) = \begin{cases} \dfrac{b^2}{a} & \text{se} \quad a \neq 0, \\ 0 & \text{se} \quad a = 0. \end{cases} \qquad \text{e} \qquad F_V''(0) = 0.$$

Esempio 5. *Consideriamo la funzione*
$$G(x, y) = x^2 + y^2 - 100\, y^2 F(x, y).$$
Dimostreremo che per ogni vettore non-nullo
$$V = (a, b) \in \mathbb{R}^2,$$
la funzione
$$G_V : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ , \qquad G_V(t) = G(ta, tb),$$
ha un minimo relativo (stretto) in $t = 0$. Osserviamo che se $a = 0$, allora
$$G(ta, tb) = b^2 t^2.$$

Quindi, ci possiamo concentrare sul caso

$$a \neq 0,$$

nel quale si ha

$$\begin{aligned} G_V(t) &= G(ta, tb) \\ &= t^2(a^2+b^2) - 100\,(bt)^2 F(ta, tb) \\ &= t^2(a^2+b^2) - 100b^2\, t^2 F_V(t). \end{aligned}$$

Ora, calcolando

$$G'_V(t) = 2t(a^2+b^2) - 100b^2\Big(2tF_V(t) + t^2F'_V(t)\Big),$$

$$G''_V(t) = 2(a^2+b^2) - 100b^2\Big(2F_V(t) + 4tF'_V(t) + t^2F''_V(t)\Big),$$

otteniamo che

$$G'_V(0) = 0 \qquad e \qquad G''_V(0) = 2(a^2+b^2).$$

Quindi, la funzione G_V ha un minimo relativo (stretto) in $t = 0$.

D'altra parte, per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$G(t^2, t) = t^4 + t^2 - 100t^2F(t^2, t) = t^4 + t^2 - 50t^2 = -49t^2 + t^4,$$

che per $|t|$ abbastanza piccolo è negativo. Quindi,

$$(0,0) \quad \textbf{non è un punto di minimo relativo per} \quad G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$$

Esercizio 6. *Data la funzione G dell'esempio precedente,*

$$G(x, y) = x^2 + y^2 - 100\, y^2 F(x, y),$$

dimostrare che G è differenziabile in $(0,0)$ e che $(0,0)$ è un punto critico di G. Dedurre che $(0,0)$ è un punto di sella per G.