Su una dimostrazione sbagliata del Teorema di Taylor

Sulla stima prinicipale nella dimostrazione del Teorema di Taylor

Nella dimostrazione del Teorema di Taylor (Capitolo 3. Parte 6), abbiamo in particolare dimostrato la proposizione seguente, per la funzione
$$\varphi = |E|,$$
dove
$$E = (E_1, E_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
era il vettore degli errori negli sviluppi (al primo ordine) delle derivate parziali $\partial_x F$ e $\partial_y F$.

Proposizione 1. *Sia* $\varphi : \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \to \mathbb{R}$ *una funzione tale che*
$$\varphi(x,y) = o\big(\sqrt{x^2+y^2}\big).$$
Allora, definendo la funzione
$$I : \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \to \mathbb{R}\ , \qquad I(x,y) := \int_0^1 \varphi(xt,yt)\,dt,$$
abbiamo che
$$I(x,y) = o\big(\sqrt{x^2+y^2}\big).$$

Dimostrazione. Per dimostrare che
$$I(x,y) = o\big(\sqrt{x^2+y^2}\big),$$
mostreremo che:
$$\textit{per ogni } \varepsilon > 0 \textit{ esiste } r > 0 \textit{ tale che}$$
$$|I(x,y)| \le \varepsilon |(x,y)| \qquad \textit{per ogni} \qquad 0 < |(x,y)| \le r.$$
Infatti, siccome
$$\varphi(x,y) = o\big(\sqrt{x^2+y^2}\big),$$
abbiamo che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $R > 0$ tale per cui
$$0 < |(x,y)| < R \qquad \Rightarrow \qquad \big|\varphi(x,y)\big| \le \varepsilon |(x,y)|.$$
In particolare, se $0 < |(x,y)| < R$ e $t \in (0,1)$,
$$0 < |(tx,ty)| = t|(x,y)| < |(x,y)| < R$$
e quindi
$$\big|\varphi(tx,ty)\big| \le \varepsilon |(tx,ty)| \le \varepsilon |(x,y)|.$$
Integrando, si ottiene
$$|I(x,y)| \le \int_0^1 |\varphi(tx,ty)|\,dt \le \int_0^1 \varepsilon |(x,y)|\,dt = \varepsilon |(x,y)|.$$
□

In seguito, discuteremo una dimostrazione sbagliata di questa proposizione.

Una dimostrazione sbagliata della Proposizione 1

Sia $\varphi(x,y)$, come nella Proposizione 1, una funzione tale che

$$\varphi(x,y) = o(|(x,y)|).$$

Per ogni $t \in (0,1)$, possiamo definire la funzione

$$\varphi_t : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}\ , \qquad \varphi_t(x,y) = \varphi(tx,ty).$$

In particolare, si ha che per ogni $t \in (0,1)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|\varphi_t(x,y)|}{|(x,y)|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|\varphi(tx,ty)|}{|(x,y)|} = t \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|\varphi(tx,ty)|}{|(tx,ty)|} = 0,$$

ovvero

$$\varphi_t(x,y) = o(|(x,y)|) \qquad \text{per ogni} \qquad t \in (0,1).$$

In questi termini l'integrale $I(x,y)$, definito nella Proposizione 1, si può scrivere come

$$I(x,y) = \int_0^1 \varphi_t(x,y)\,dt,$$

mentre

$$\frac{I(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_0^1 \frac{\varphi_t(x,y)}{|(x,y)|}\,dt.$$

Quindi, uno può cercare di dimostrare la Proposizione 1 semplicemente scambiando i limiti con il segno di integrale

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{I(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \int_0^1 \frac{\varphi_t(x,y)}{|(x,y)|}\,dt = \int_0^1 \left\{ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\varphi_t(x,y)}{|(x,y)|} \right\} dt = 0,$$

ma **la formula**

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \int_0^1 \frac{\varphi_t(x,y)}{|(x,y)|}\,dt = \int_0^1 \left\{ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\varphi_t(x,y)}{|(x,y)|} \right\} dt$$

per una generica famiglia di funzioni

$$\varphi_t : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R},$$

potrebbe non valere!

Esempio 2. *Consideriamo la famiglia di funzioni*

$$\psi_t : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}\ , \qquad \psi_t(x,y) = \begin{cases} 0 & se \quad \sqrt{x^2+y^2} < \dfrac{t}{2}\ ; \\ \dfrac{2}{t^2}\sqrt{x^2+y^2} & se \quad \dfrac{t}{2} \le \sqrt{x^2+y^2} \le t\ ; \\ 0 & se \quad \sqrt{x^2+y^2} > t\ . \end{cases}$$

Allora, ovviamente

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \psi_t(x,y) = 0 \qquad \textit{per ogni} \qquad t \in (0,1);$$

mentre si calcola facimente che

$$\int_0^1 \psi_t(x,y)\,dt = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \textit{per ogni} \qquad 0 < |(x,y)| < \frac{1}{2}\,.$$