Interpretazione geometrica della differenziabilità

Convergenza uniforme di famiglie di funzioni

Definizione 1. *Sia Ω un insieme in $\mathbb{R}^d$ e $G : \Omega \to \mathbb{R}^m$ una funzione limitata. Definiamo*

$$\|G\|_{L^\infty(\Omega)} := \sup_{x\in\Omega} |G(x)|.$$

Definizione 2 (Convergenza uniforme e convergenza puntuale)**.** *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme dato e $F_r : \Omega \to \mathbb{R}^m$ una famiglia di funzioni limitate che dipende dal parametro $r > 0$. Sia $G : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione limitata su Ω. Diciamo che F_r* **converge uniformemente** *alla funzione $G : \Omega \to \mathbb{R}^m$ se*

$$\lim_{r\to 0} \|F_r - G\|_{L^\infty(\Omega)} = 0.$$

Esempio 3. *La famiglia di funzioni*

$$F_r : [-1, 1] \to \mathbb{R}\ , \qquad F_r(x) = r + x^2\ ,$$

converge uniformemente alla funzione $G(x) = x^2$ sull'intervallo $[-1, 1]$.

Esempio 4. *La famiglia di funzioni*

$$F_r : [-1, 1] \to \mathbb{R}\ , \qquad F_r(x) = (x - r)^2\ ,$$

converge uniformemente alla funzione $G(x) = x^2$ sull'intervallo $[-1, 1]$.

Una definizione equivalente della convergenza uniforme

Teorema 5. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme dato, $G : \Omega \to \mathbb{R}^m$ una funzione limitata e $F_r : \Omega \to \mathbb{R}^m$ una famiglia di funzioni limitate che dipende dal parametro $r > 0$. Allora, sono equivalenti:*

(1) *F_r converge uniformemente a G per $r \to 0$;*

(2) *per ogni successione $r_n \to 0$ e per ogni successione (non necessariamente convergente) $Y_n \in \Omega$, abbiamo che*

$$\lim_{n\to\infty} \big|F_{r_n}(Y_n) - G(Y_n)\big| \to 0.$$

Dimostrazione. Supponiamo che (1) sia vero. Siano date due successioni

$$r_n \to 0^+ \qquad \text{e} \qquad Y_n \in \Omega.$$

Allora,

$$|F_{r_n}(Y_n) - G(Y_n)| \le \sup_{Y\in\Omega} |F_{r_n}(Y) - G(Y)| = \|F_{r_n} - G\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Siccome

$$\lim_{n\to\infty} \|F_{r_n} - G\|_{L^\infty(\Omega)} = 0,$$

otteniamo (2).

Supponiamo ora che (1) non sia vero. Allora, esistono $\varepsilon > 0$ ed una successione $r_n \to 0$ tale che

$$\sup_{Y\in\Omega} |F_{r_n}(Y) - G(Y)| = \|F_{r_n} - G\|_{L^\infty(\Omega)} > \varepsilon \qquad \text{per ogni} \quad n \ge 1.$$

Di conseguenza, per ogni $n \ge 1$ possiamo trovare $Y_n \in \Omega$ tale che

$$|F_{r_n}(Y_n) - G(Y_n)| > \frac{\varepsilon}{2}.$$

Quindi, anche (2) non è vero. □

Continuità e la convergenza uniforme dei riscalamenti 0-omogenei

Osservazione 6. *Sia $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una dunzione data e $X_0 \in \mathbb{R}^d$. Ricordiamo che sono equivalenti*

(i) $\lim_{X \to 0} F(X) = F(X_0)$;

(ii) *per ogni successione $X_n \to X_0$ si ha* $\lim_{n\to\infty} \big|F(X_n) - F(X_0)\big| \to 0$.

Proposizione 7. *Sia $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una funzione. Per ogni $X_0 \in \mathbb{R}^d$ consideriamo la famiglia di funzioni*

$$F_r(X) := F(X_0 + rX)\,.$$

Dimostrare che sono equivalenti:

(i) *La funzione F è continua in X_0.*

(ii) *Per $r \to 0$, la famiglia $F_r : B_1 \to \mathbb{R}$ converge uniformemente su B_1 alla funzione costante*

$$F_0(X) = F(X_0) \quad \textit{per ogni} \quad X \in \mathbb{R}^d.$$

Dimostrazione. Dimostriamo prima che (i) $\Rightarrow$ (ii). Siano $r_n \to 0$ e $Y_n \in B_1$ una successione di punti. Allora, siccome $r_nY_n \to 0$, abbiamo

$$|F_{r_n}(Y_n) - F(X_0)| = |F(X_0 + r_nY_n) - F(X_0)| \to 0,$$

il che implica (ii).
Dimostriamo ora che (ii) $\Rightarrow$ (i). Sia X_n una successione che tende a X_0. Allora, abbiamo

$$|F(X_n) - F(X_0)| = \Big|F\Big(X_0 + r_n\frac{X_n - X_0}{r_n}\Big) - F(X_0)\Big|$$

Scegliendo $r_n = 2|X_n - X_0|$, abbiamo che

$$r_n \to 0 \qquad \text{e} \qquad Y_n := \frac{X_n - X_0}{2r_n} \in B_1.$$

Di conseguenza, per l'uniforme continuità di F,

$$|F(X_n) - F(X_0)| = |F_{r_n}(Y_n) - F(X_0)| \to 0.$$

□

Convergenza dei riscalamenti 1-omogenei

Proposizione 8. *Siano $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una funzione, $X_0 \in \mathbb{R}^d$ un punto e $v \in \mathbb{R}^d$ un vettore. Consideriamo la famiglia di funzioni*

$$F_r(X) = \frac{1}{r}\Big(F(X_0 + rX) - F(X_0)\Big)\,.$$

Dimostrare che sono equivalenti:

(i) $F(X) = F(X_0) + v \cdot (X - X_0) + o(|X - X_0|)$, *ovvero*

$$\lim_{X \to X_0} \frac{\big|F(X) - \big(F(X_0) + v \cdot (X - X_0)\big)\big|}{|X - X_0|} = 0\,. \tag{1}$$

(ii) *Per $r \to 0$, la famiglia $F_r : B_1 \to \mathbb{R}$ converge uniformemente in B_1 alla funzione lineare*

$$L(X) = v \cdot X \quad \textit{per ogni} \quad X \in \mathbb{R}^d.$$

Dimostrazione. Dimostriamo prima che (i) $\Rightarrow$ (ii). Siano $r_n \to 0$ e $Y_n \in B_1$ una successione (non necessariamente convergente). Allora,

$$\big|F_{r_n}(Y_n) - v \cdot Y_n\big| = \Big|\frac{1}{r_n}\big(F(X_0 + r_n Y_n) - F(X_0)\big) - v \cdot Y_n\Big| = |Y_n| \frac{\big|F(X_0 + r_n Y_n) - F(X_0) - v \cdot (r_n Y_n)\big|}{|r_n Y_n|}.$$

Siccome, $r_n Y_n \to 0$ possiamo applicare (i) alla successione $X_0 + r_n Y_n$. Siccome Y_n è limitata, abbiamo

$$\big|F_{r_n}(Y_n) - v \cdot Y_n\big| \to 0,$$

il che conclude la dimostrazione di (i) $\Rightarrow$ (ii).

Dimostriamo ora che (ii) $\Rightarrow$ (i). Sia $X_n \to X_0$. Definiamo $Y_n = \frac{X_n - X_0}{r_n}$, dove il raggio r_n

$$\begin{aligned}
\frac{\big|F(X_n) - F(X_0) - v \cdot (X_n - X_0)\big|}{|X_n - X_0|} &= \frac{\big|F(X_0 + r_n Y_n) - F(X_0) - v \cdot (r_n Y_n)\big|}{r_n |Y_n|} \\
&= \frac{\big|F(X_0 + r_n Y_n) - F(X_0) - v \cdot (r_n Y_n)\big|}{r_n |Y_n|} \\
&= \frac{1}{|Y_n|}\big|F_{r_n}(Y_n) - v \cdot Y_n\big|.
\end{aligned}$$

Scegliendo

$$r_n = 2|X_n - X_0|,$$

abbiamo che $r_n \to 0$ e $|Y_n| = 1/2$. Di conseguenza, applicando (ii), otteniamo (1). $\square$