Funzioni differenziabili a valori in $\mathbb{R}^n$

Applicazioni lineari

Definizione 1. *Diciamo che una funzione* $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *è lineare se*

$$L(\alpha u + \beta v) = \alpha L(u) + \beta L(v),$$

per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *e per ogni* $u, v \in \mathbb{R}^n$.

Ricordiamo che ogni funzione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è rappresentata da una matrice. Definiamo

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

e per ogni $j = 1, \dots, n$,

$$L(e_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Allora, per ogni vettore (colonna) $h \in \mathbb{R}^n$ con coordinate $h_1, h_2, \dots, h_n$, abbiamo

$$\begin{aligned} L(h) &= L(h_1e_1 + h_2e_2 + \dots + h_ne_n) \\ &= h_1L(e_1) + h_2L(e_2) + \dots + h_nL(e_n) = \begin{pmatrix} h_1a_{11} + h_2a_{12} + \dots + h_na_{1n} \\ h_1a_{21} + h_2a_{22} + \dots + h_na_{2n} \\ \vdots \\ h_1a_{m1} + h_2a_{m2} + \dots + h_na_{mn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quindi, la funzione lineare L è rappresntata dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Precisamente, abbiamo che

$$L(h) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \qquad \text{per ogni} \qquad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Scriveremo quindi $L_A(h)$, oppure semplicemente Ah, al posto di $L(h)$.

Considerando i vettori riga della matrice A :

$$\begin{cases} A_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), \\ A_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \\ \dots \\ A_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}). \end{cases}$$

Allora, possiamo anche scrivere $L_A(h)$ come

$$L_A(h) = \begin{pmatrix} A_1 \cdot h \\ A_2 \cdot h \\ \vdots \\ A_m \cdot h \end{pmatrix} \qquad \text{per ogni} \qquad h \in \mathbb{R}^n.$$

Ora, usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz, otteniamo

$$\begin{aligned} |L(h)| &= \Big(\sum_{j=1}^m |A_j \cdot h|^2\Big)^{1/2} \\ &\leq \Big(\sum_{j=1}^m |A_j|^2\,|h|^2\Big)^{1/2} = \Big(|h|^2 \sum_{j=1}^m |A_j|^2\Big)^{1/2} = |h| \Big(\sum_{j=1}^m |A_j|^2\Big)^{1/2} \end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\Big(\sum_{j=1}^m |A_j|^2\Big)^{1/2} = \Big(\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{jk}^2\Big)^{1/2}.$$

Definizione: Definiamo la norma della matrice A come

$$\|A\| = \Big(\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{jk}^2\Big)^{1/2}.$$

Quindi, abbiamo dimostrato la seguente proposizione.

Proposizione 2. *Per ogni applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, abbiamo la disuguaglianza*

$$|L_A(h)| \leq \|A\| |h| \qquad \textit{per ogni} \qquad h \in \mathbb{R}^n.$$

Funzioni differenziabili a valori in $\mathbb{R}^m$

Definizione 3. *Siano Ω un insieme aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia*

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix} : \Omega \to \mathbb{R}^m$$

una funzione a valori in $\mathbb{R}^m$. Diciamo che F è differenziabile nel punto $X_0 \in \Omega$, se esiste una funzione lineare

$$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

tale che

$$F(X_0 + X) = F(X_0) + L(X) + o(|X|),$$

ovvero tale che

$$\lim_{X \to 0} \frac{|F(X_0 + X) - F(X_0) - L(X)|}{|X|} = 0.$$

Inoltre, diremo che F è derivabile in X_0 se esistono le derivate parziali $\partial_j F_i(X_0)$ per ogni $i = 1, \dots, m$ ed ogni $j = 1, \dots, n$.

Proposizione 4 (Differenziabile $\Rightarrow$ continua)**.** *Siano Ω un insieme aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$ una funzione. Se F è differenziabile in $X_0 \in \Omega$, allora F è anche continua in X_0.*

Dimostrazione: per esercizio.

Teorema 5. *Siano Ω un insieme aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia*

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix} : \Omega \to \mathbb{R}^m$$

una funzione a valori in $\mathbb{R}^m$. Allora F è differenziabile se e solo se tutte le funzioni a valori reali $F_1, F_2, \ldots, F_m$ lo sono. Di conseguenza, se F è differenziabile nel punto $X_0 \in \Omega$, allora è anche derivabile in X_0 e

$$F(X_0+X) = F(X_0) + \begin{pmatrix} \partial_1 F_1(X_0) & \ldots & \partial_n F_1(X_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 F_m(X_0) & \ldots & \partial_n F_m(X_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + o(|X|).$$

Definizione. La matrice

$$\begin{pmatrix} \partial_1 F_1(X_0) & \ldots & \partial_n F_1(X_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 F_m(X_0) & \ldots & \partial_n F_m(X_0) \end{pmatrix}$$

è detta matrice jacobiana di F (in X_0) e viene indicata con

$$JF(X_0) \quad \text{oppure} \quad DF(X_0).$$

Dimostrazione: Sia A una matrice con m righe ed n colonne e con vettori riga $A_1, \ldots, A_m$, dove

$$A_j \in \mathbb{R}^n \qquad \text{per ogni} \qquad j = 1, \ldots, m.$$

Quindi il vettore

$$F(X_0 + X) - F(X_0) - AX \in \mathbb{R}^m$$

ha componenti

$$F_j(X_0 + X) - F_j(X_0) - A_j \cdot X \qquad \text{dove} \qquad j = 1, \ldots, m,$$

e possiamo calcolare

$$\frac{|F(X_0 + X) - F(X_0) - AX|}{|X|} = \left[\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{F_j(X_0 + X) - F_j(X_0) - A_j \cdot X}{|X|} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Di conseguenza,

$$\lim_{X \to 0} \frac{|F(X_0 + X) - F(X_0) - AX|}{|X|} = 0$$

se e solo se

$$\lim_{X \to 0} \frac{\big|F_j(X_0 + X) - F_j(X_0) - A_j \cdot X\big|}{|X|} = 0 \qquad \text{per ogni} \qquad j = 1, \ldots, m.$$

Si ha quindi che F è differenziabile in X_0 se e solo se le funzioni a valori reali $F_1, \ldots, F_m$ lo sono. Inoltre, i vettori riga A_j della matrice A sono i gradienti (trasposti) delle funzioni reali F_j:

$$A_j = DF_j(X_0) = \big(\partial_1 F_j(X_0), \ldots, \partial_n F_j(X_0)\big),$$

il che conclude la dimostrazione. □

Come immediata conseguenza otteniamo la seguente generalizzazione del teorema del differenziale.

Corollario 6 (Teorema del differenziale)**.** *Siano Ω un insieme aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia*

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix} : \Omega \to \mathbb{R}^m$$

una funzione derivabile in Ω. Se le derivate parziali

$$\partial_i F_j : \Omega \to \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m,$$

sono continue in X_0, allora F è differenziabile in X_0.

Un altro corollario della Proposizione 5 è il seguente.

Corollario 7. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ e siano*

$$F : \Omega \to \mathbb{R}^m \qquad e \qquad G : \Omega \to \mathbb{R}^m,$$

due funzioni differenziabili nel punto $X_0 \in \Omega$. Allora:

(a) *la somma $F + G : \Omega \to \mathbb{R}^m$ è differenziabile in X_0;*

(b) *il prodotto scalare $F \cdot G : \Omega \to \mathbb{R}$ è differenziabile in X_0.*

Composizione di funzioni differenziabili

Teorema 8 (Composizione di funzioni differenziabili)**.** *Siano*

$$F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n \qquad e \qquad G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

due funzioni differenziabili rispettivamente nei punti

$$X_0 \in \mathbb{R}^d \qquad e \qquad Y_0 := F(X_0) \in \mathbb{R}^n .$$

Allora, la funzione composta

$$G \circ F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$$

è differenziabile in X_0 e

$$D(G \circ F)(X_0) = DG(F(X_0))DF(X_0)$$

che possiamo scrivere anche come

$$\begin{pmatrix} \partial_1(G \circ F)_1(X_0) & \dots & \partial_d(G \circ F)_1(X_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1(G \circ F)_m(X_0) & \dots & \partial_d(G \circ F)_m(X_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 G_1(Y_0) & \dots & \partial_n G_1(Y_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 G_m(Y_0) & \dots & \partial_n G_m(Y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 F_1(X_0) & \dots & \partial_d F_1(X_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 F_n(X_0) & \dots & \partial_d F_n(X_0) \end{pmatrix} .$$

oppure, ommettendo la variabile X_0,

$$\begin{pmatrix} \partial_1(G \circ F)_1 & \dots & \partial_d(G \circ F)_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1(G \circ F)_m & \dots & \partial_d(G \circ F)_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 G_1 \circ F & \dots & \partial_n G_1 \circ F \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 G_m \circ F & \dots & \partial_n G_m \circ F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 F_1 & \dots & \partial_d F_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 F_n & \dots & \partial_d F_n \end{pmatrix} .$$

Dimostrazione: Siano

$$B = \begin{pmatrix} \partial_1 G_1(Y_0) & \dots & \partial_n G_1(Y_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 G_m(Y_0) & \dots & \partial_n G_m(Y_0) \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad A = \begin{pmatrix} \partial_1 F_1(X_0) & \dots & \partial_d F_1(X_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 F_n(X_0) & \dots & \partial_d F_n(X_0) \end{pmatrix} .$$

Per ipotesi, esistono funzioni

$$\varepsilon_F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n \qquad \text{e} \qquad \varepsilon_G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$

tali che

$$F(X_0 + X) = F(X_0) + AX + \varepsilon_F(X) \qquad \text{dove} \qquad \lim_{X\to 0} \frac{|\varepsilon_F(X)|}{|X|} = 0\ ,$$

$$G(Y_0 + Y) = F(Y_0) + BY + \varepsilon_G(Y) \qquad \text{dove} \qquad \lim_{Y\to 0} \frac{|\varepsilon_G(Y)|}{|Y|} = 0\ .$$

Ora, calcoliamo

$$\begin{aligned} G(F(X_0+X)) &= G\big(F(X_0) + AX + \varepsilon_F(X)\big) \\ &= G\big(F(X_0)\big) + B\big(AX + \varepsilon_F(X)\big) + \varepsilon_G\big(AX + \varepsilon_F(X)\big) \\ &= G\big(F(X_0)\big) + BAX + B\big(\varepsilon_F(X)\big) + \varepsilon_G\big(AX + \varepsilon_F(X)\big). \end{aligned}$$

Quindi, basta dimostrare che

$$B\big(\varepsilon_F(X)\big) + \varepsilon_G\big(AX + \varepsilon_F(X)\big) = o(X).$$

Infatti, abbiamo che

$$\frac{\big|B\big(\varepsilon_F(X)\big)\big|}{|X|} \le \|B\| \frac{\big|\varepsilon_F(X)\big|}{|X|},$$

e dunque

$$\lim_{X\to 0} \frac{\big|B\big(\varepsilon_F(X)\big)\big|}{|X|} = 0.$$

D'altra parte,

$$\begin{aligned} \frac{\big|\varepsilon_G\big(AX + \varepsilon_F(X)\big)\big|}{|X|} &= \frac{\big|\varepsilon_G\big(AX + \varepsilon_F(X)\big)\big|}{|AX + \varepsilon_F(X)|} \frac{\big|AX + \varepsilon_F(X)\big|}{|X|} \\ &\le \frac{\big|\varepsilon_G\big(AX + \varepsilon_F(X)\big)\big|}{|AX + \varepsilon_F(X)|} \left(\|A\| + \frac{\big|\varepsilon_F(X)\big|}{|X|} \right), \end{aligned}$$

e quindi

$$\lim_{X\to 0} \frac{\big|\varepsilon_G\big(AX + \varepsilon_F(X)\big)\big|}{|X|} = 0. \qquad \square$$