Prova scritta – 29/6/2024

Non è consetito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. *Consideriamo gli insiemi*

(*A*) $\Omega_A = B_1(0,0) \setminus \Big\{(x,0) \ : \ x \geq 0\Big\}$;

(*B*) $\Omega_B = B_1(0,0) \cup \Big\{(x,0) \ : \ x \geq 0\Big\}$;

(*C*) $\Omega_C = B_1(0,0) \cap \Big\{(x,0) \ : \ x \geq 0\Big\}$;

(*D*) $\Omega_D = \overline{B}_1(0,0) \setminus \Big\{(x,0) \ : \ x \geq 0\Big\}$;

(*E*) $\Omega_E = \overline{B}_1(0,0) \cup \Big\{(x,0) \ : \ x \geq 0\Big\}$;

(*F*) $\Omega_F = \overline{B}_1(0,0) \cap \Big\{(x,0) \ : \ x \geq 0\Big\}$.

Gli insiemi seguenti sono **compatti :** F

Gli insiemi seguenti sono **aperti :** A

Gli insiemi seguenti non sono **né aperti, né compatti :** B, C, D, E

Esercizio 2. *Trovare la frontiera dell'insieme*

$$D = B_1(0,0) \setminus \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x + y \geq 1\Big\}$$

$\partial D = \Big\{(x, 1-x) \ : \ x \in [0,1]\Big\} \cup \Big\{(\cos\theta, \sin\theta) \ : \ \theta \in \Big[\frac{\pi}{2}, 2\pi\Big]\Big\}$.

Esercizio 3. *Sviluppare fino al secondo ordine in* $(0,0)$ *la funzione*

$$\frac{e^x\sqrt{1+2y}}{\cos(2x)} = 1 + x + y + \frac{5}{2}x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2 + o(x^2+y^2)$$

Esercizio 4. *Siano* $\gamma(t) = \Big(\cos(2t)e^t - 1\,,\ \sin(2t)\cos(5t)\Big)$ *e* $F(x,y) = \dfrac{x-2y}{1+x-y}$.

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)) = -3$$

Esercizio 5. *Calcolare, al variare del parametro* $A \in \mathbb{R}$, *la matrice hessiana* H *della funzione* $F(x,y) = \dfrac{(1+Axy)e^{2x}}{1-y^2}$ *nel punto* $(0,0)$.

$$H = \begin{pmatrix} 4 & A \\ A & 2 \end{pmatrix}$$

Per quali valori di A *la matrice* H *è* **definita positiva**?

$A \in (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

Esercizio 6. *Sia* $\alpha = (y^2 + 2xy + x)\,dx + (xy + x^2)\,dy$ *e sia* γ *la curva semplice chiusa e* C^1 *a tratti che parametrizza il bordo del dominio* $\Omega = \{(x,y) : 0 < y < x \leq 1\}$ *in senso antiorario.*

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \alpha = -\frac{1}{6}$

Esercizio 7. *Consideriamo il campo* $F(x,y) = \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2+5}, \dfrac{3x-y}{x^2+y^2+6}\right)$.

Dato l'insieme $\Omega = B_{\sqrt{3}}(0,0)$, *calcolare* $\displaystyle\iint_\Omega \operatorname{div} F(x,y)\,dx\,dy = -\frac{\pi}{3}$

Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 8. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = xy^2 - x^2 + 2xy.$$

$(0,0)$ - punto di sella
$(0,-2)$ - punto di sella
$(-\frac{1}{2},-1)$ - punto di max relativo

Trovare i punti critici di F *in* $\mathbb{R}^2$. *Studiando la matrice hessiana, dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.*

Esercizio 9. *Mostrare che l'estremo superiore* $\sup_D F$ *della funzione*

$$F(x,y,z) = x,$$

sull'insieme

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x-y)^2 + (2x-z)^2 + (y-2z)^2 \leq 3\right\}.$$

è raggiunto sul bordo ∂D *e trovarlo.* $\max_D F = \frac{4}{3}$ nel punto $\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{5}{3}\right)$

Esercizio 10. *Data la funzione*

$$F(x,y) = \frac{e^{xy}-1}{x^2+4y^2},$$

trovare $\displaystyle\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = \frac{1}{4}$

Esercizio 11. *Consideriamo la funzione*

$$F(0,0) = 0 \quad e \quad F(x,y) = \frac{x^{n+7}y^{n+3}}{(x^2+y^2+\sin(xy^2))^{2n}} \quad se\ (x,y) \neq (0,0).$$

Per quali valori del parametro intero $n \geq 1$ *la funzione* F *è differenziabile in* $(0,0)$? $n = 1, 2, 3, 4$
