
Prova scritta – 26/1/2024

Non è consentito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. Consideriamo gli insiemi

$$(A) \Omega_A = \overline{B}_1(0,0) \setminus ([0,1] \times [0,1]) ; \quad (D) \Omega_D = B_1(0,0) \setminus ([0,1] \times [0,1]) ;$$

$$(B) \Omega_B = \overline{B}_1(0,0) \setminus ([0,1) \times [0,1]) ; \quad (E) \Omega_E = B_1(0,0) \setminus ([0,1) \times [0,1]) ;$$

$$(C) \Omega_C = \overline{B}_1(0,0) \setminus ((0,1] \times (0,1]) ; \quad (F) \Omega_F = B_1(0,0) \setminus ((0,1] \times (0,1]) .$$

Gli insiemi seguenti sono **compatti**:

Gli insiemi seguenti sono **aperti**:

Gli insiemi seguenti non sono **né aperti, né compatti**:

Esercizio 2. Trovare la frontiera dell'insieme

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (1-x)^2 \leq y^2 \leq 1-x^2 \quad e \quad y \geq 0 \right\}$$

$$\partial D =$$

Esercizio 3. Sviluppare fino al secondo ordine in $(0,0)$ la funzione

$$\frac{\sin(e^{x+y} - e^{x-y})}{1-xy} =$$

Esercizio 4. Siano $\gamma(t) = \left(\ln(1-t) \cos(3t+t^2), 1 - e^{2t+t^2} \right)$ e $F(x,y) = e^{3x} + e^y - e^{xy}$.

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(\gamma(t)) =$$

Esercizio 5. Calcolare la matrice hessiana H della funzione $F(x, y) = \frac{\sin(x+y) + e^{-xy}}{1-x-y}$ in $(0, 0)$. Dire se H è definita positiva, semi-definita positiva, definita negativa, semi-definita negativa, indefinita.

$H =$

La matrice H è:

Esercizio 6. Sia $\alpha = (y^2 + 3) dx + (xy - x^2) dy$ e sia γ la curva semplice chiusa e C^1 che parametrizza il bordo del dominio $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq y \leq x \leq 1\}$ in senso antiorario.

Calcolare $\int_{\gamma} \alpha =$

Esercizio 7. Consideriamo il campo $F(x, y) = ((3y - 2x)e^{x^2+y^2}, yx^2 + y^3)$.

Dato l'insieme $\Omega = B_1(0, 0) \cap \{(x, y) : y \geq 0\}$, calcolare $\iint_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y) dx dy =$

Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 8. Consideriamo la funzione

$$F(x, y) = y^3 x - x^2 y^2 + xy^2.$$

Trovare i punti critici di F in \mathbb{R}^2 . Studiando la matrice hessiana, dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.

Esercizio 9. Trovare l'estremo superiore della funzione

$$F(x, y, z) = y + z,$$

sull'insieme

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x + y + z)^2 + y^2 + 2z^2 \leq 1\}.$$

Esercizio 10. Data la funzione

$$F(x, y) = \frac{xy}{3x^2 + y^2 \sqrt{x^2 + y^2}},$$

calcolare $\limsup_{(x,y) \rightarrow (0,0)} F(x, y)$.

Esercizio 11. Consideriamo la funzione

$$F(0, 0) = 0 \quad e \quad F(x, y) = \frac{x^{n+4} y^{n+6}}{(x^2 + y^2 - x^2 y)^{2n}} \quad \text{se } (x, y) \neq (0, 0).$$

Per quali valori del parametro intero $n \geq 1$ la funzione F è differenziabile in $(0, 0)$?
