Analisi Matematica II a.a. 2022 – 2023

Prova scritta – 9/1/2024

Non è consetito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. *Consideriamo gli insiemi*

$(A)\ \Omega_A = B_1(0,0) \cup \Big(\{1\} \times (-1,1)\Big)\ ;\quad (D)\ \Omega_D = \overline{B}_1(0,0) \cup \Big(\{1\} \times [-1,1]\Big)\ ;$

$(B)\ \Omega_B = B_1(0,0) \setminus \Big(\{1\} \times (-1,1)\Big)\ ;\quad (E)\ \Omega_E = \overline{B}_1(0,0) \setminus \Big(\{1\} \times [-1,1]\Big)\ ;$

$(C)\ \Omega_C = \overline{B}_1(0,0) \cup \Big(\{1\} \times (-1,1)\Big)\ ;\quad (F)\ \Omega_F = \overline{B}_1(0,0) \cap \Big(\{1\} \times [-1,1]\Big)\ .$

Gli insiemi seguenti sono **compatti :** D, F

Gli insiemi seguenti sono **aperti :** B

Gli insiemi seguenti non sono **né aperti, né compatti :** A, C, E

Esercizio 2. *Trovare la frontiera dell'insieme*

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x^2 \le y - 1 \le 2x \le 2\Big\}$$

$\partial D = \{(x, x^2+1) : 0 \le x \le 1\} \cup \{(x, 2x+1) : 0 \le x \le 1\} \cup \{(1,y) : y \in [2,3]\}$

Esercizio 3. *Sviluppare fino al secondo ordine in* $(0,0)$ *la funzione*

$$\frac{e^{\sin x}\cos(x+y)}{1-y} = 1 + x + y + \frac{1}{2}y^2 + o(x^2+y^2)$$

Esercizio 4. *Siano* $\gamma(t) = \Big(\ln(1+2t)\,,\ \ln(1-3\sin t)\Big)$ *e* $F(x,y) = \dfrac{\cos(x-2y)+\cos(2x+y)}{\sqrt{1+x-y}}$.

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)) = -5$$

Esercizio 5. *Calcolare la matrice hessiana H della funzione* $F(x,y) = \dfrac{e^{2xy}}{1+\sin(x+2y)}$ *in* $(0,0)$. *Dire se H è definita positiva, semi-definita positiva, definita negativa, semi-definita negativa, indefinita.*

$H = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ *La matrice H è:* indefinita

---

Esercizio 6. *Sia* $\alpha = (y^3 + 2xy)\,dx + (6xy^2 + x^3 + x^2)\,dy$ *e sia γ la curva semplice chiusa e C^1 che parametrizza il bordo del dominio* $\Omega = \{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 2\}$ *in senso antiorario.*

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \alpha =$ 6π

Esercizio 7. *Consideriamo il campo* $F(x,y) = \Big((3x+7y)\ln\big(1+2(x^2+y^2)\big)\,,\,(3x+2y)\ln\big(2+x^2+y^2\big)\Big)$.

Sulla palla B_R di centro $(0,0)$ e raggio $R = 1$, calcolare $\displaystyle\iint_{B_R} \mathrm{div}F(x,y)\,dx\,dy =$ $5\pi \ln 3$

Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 8. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = x^3 - y^2 + x^2 y.$$

Trovare i punti critici di F in $\mathbb{R}^2$ e dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.

Esercizio 9. *Trovare il massimo della funzione*

$$F(x,y,z) = x + 2y\,,$$

sull'insieme

$$D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + (z - x + y)^2 \leq 1\Big\}.$$

Esercizio 10. *Date le funzioni*

$$F(x,y) = \frac{xy^2}{x^2 + (x^2+y^2)y^2} \qquad e \qquad G(x,y) = \frac{xy^2 - x^2y^2}{x^2 + (x^2+y^2)y^2},$$

calcolare $\displaystyle\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$; $\displaystyle\liminf_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$; $\displaystyle\limsup_{(x,y)\to(0,0)} G(x,y)$; $\displaystyle\liminf_{(x,y)\to(0,0)} G(x,y)$.

Esercizio 11. *Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come*

$$F(0,0) = 0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{x^n y^{n+7}}{(x^2+y^2+y^4)^{2n}} \quad se\ (x,y) \neq (0,0),$$

dove $n \geq 1$ è un numero intero.

(1) *Per quali valori del parametro $n \geq 1$ la funzione è derivabile in $(0,0)$.*

(2) *Per quali valori del parametro $n \geq 1$ la funzione F è continua in $(0,0)$.*

(3) *Per quali valori del parametro $n \geq 1$ la funzione F è differenziabile in $(0,0)$.*

ANALISI II - 9/1/2024

Es. 8 $\quad F(x,y) = x^3 - y^2 + x^2 y$

Per trovare i punti critici di F calcoliamo il gradiente

$$\begin{cases} \partial_x F = 3x^2 + 2xy \\ \partial_y F = x^2 - 2y \end{cases}$$

e cerchiamo le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \partial_x F(x,y) = 0 \\ \partial_y F(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (3x+2y)\,x = 0 \\ x^2 - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ x^2(3+x) = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono: $x = 0, y = 0$ e $x = -3, y = \frac{9}{2}$.

Calcoliamo la matrice hessiana

$$\nabla^2 F(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx} F & \partial_{xy} F \\ \partial_{yx} F & \partial_{yy} F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x+2y & 2x \\ 2x & -2 \end{pmatrix}$$

① Nel punto $(-3, 9/2)$ abbiamo

$$\det(\nabla^2 F) = \det\begin{pmatrix} -9 & -6 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} = 18 - 36 = -18 < 0$$

Quindi, la matrice hessiana è indefinita e di conseguenza $(-3, 9/2)$ è un punto di sella.

② Nel punto $(0,0)$ abbiamo

$$\det(D^2F) = \det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\operatorname{tr}(D^2F) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -2$$

Quindi la matrice hessiana è semi-definita negativa. In questo caso lo studio della matrice hessiana non permette di stabilire se $(0,0)$ è un punto di massimo o di minimo relativo, oppure un punto di sella.

Consideriamo la funzione

$$F(x,0) = x^3.$$

Abbiamo che
$$\begin{cases} F(x,0) > 0, & \text{se } x > 0 \\ F(x,0) = 0, & \text{se } x = 0 \\ F(x,0) < 0, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Quindi $(0,0)$ non può essere né un punto di minimo relativo, né un punto di massimo relativo. Quindi $(0,0)$ è un punto di sella.

Es 9. Cerchiamo il massimo della funzione

$$F(x,y,z) = x+2y$$

sull'insieme

$$D = \{(x,y,z) \;:\; x^2+y^2+(z-x+y)^2 \leq 1\}.$$

Dimostriamo prima che il massimo di F è raggiunto su D.

1) D è un insieme chiuso. Infatti, data una qualsiasi successione $(x_n,y_n,z_n) \in \mathbb{R}^3$ con le proprietà seguenti

- $(x_n, y_n, z_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (x_\infty, y_\infty, z_\infty)$;
- $(x_n, y_n, z_n) \in D$ per ogni n;

abbiamo che (per come è definito D)

$$x_n^2 + y_n^2 + (z_n - x_n + y_n)^2 \leq 1.$$

Passando al limite per $n \to +\infty$, otteniamo:

$$x_\infty^2 + y_\infty^2 + (z_\infty - x_\infty - y_\infty)^2 \leq 1.$$

Quindi $(x_\infty, y_\infty, z_\infty) \in D$ e di conseguenza D è chiuso (per successioni).

2) <u>D è limitato.</u> Sia $(x,y,z) \in D$. Allora

$$x^2 + y^2 + (z-x+y)^2 \leq 1$$

e di conseguenza: $\begin{cases} |x| \leq 1 \\ |y| \leq 1 \\ |z-x-y| \leq 1 \end{cases}$

Per la disuguaglianza triangolare

$$|z| = |(z-x+y) + x + (-y)|$$
$$\leq |z-x+y| + |x| + |y| \leq 3.$$

Quindi D è limitato.

3) Siccome la funzione F è continua e D è compatto (chiuso e limitato), per il Teorema di Weierstrass, abbiamo che F ammette un massimo su D. Inoltre, siccome $\nabla F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, abbiamo che F non ha punti critici e quindi il massimo di F è raggiunto sul bordo ∂D.

4) Per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, il punto di massimo (x,y,z) è una delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda(2x-y-z) \\ 2 = 2\lambda(2y+z-x) \\ 0 = 2\lambda(z-x+y) \\ x^2+y^2+(z-x+y)^2 = 1 \end{cases}$$

Per le prime due equazioni abbiamo che $\lambda \neq 0$.

Quindi, la terza equazione implica $z-x+y=0$, mentre le prime due ci danno

$$2(2x-y-z) = 2y+z-x.$$

Quindi, abbiamo il sistema

$$\begin{cases} z = x-y \\ 4x-2y-2z = 2y+z-x \\ x^2+y^2+(z-x+y)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = x-y \\ 5x-3(x-y)-4y = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = x-y \\ 2x-y = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 2x \\ z = -x \\ 5x^2 = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ le soluzioni sono

① $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $y = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $z = -\frac{1}{\sqrt{5}}$;

② $x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $y = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $z = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Siccome

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \sqrt{5},$$

$$F\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\sqrt{5},$$

abbiamo che il massimo di F è $\sqrt{5}$ ed è raggiunto nel punto $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Es. 10 Consideriamo la funzione

$$F(x,y) = \frac{xy^2}{x^2 + (x^2+y^2)y^2}.$$

In coordinate polari:

$$F(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r\cos\theta\sin^2\theta}{\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}.$$

Siccome

$$\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = \lim_{r\to 0}\left\{\sup_\theta F(r\cos\theta, r\sin\theta)\right\},$$

$$\liminf_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = \lim_{r\to 0}\left\{\inf_\theta F(r\cos\theta, r\sin\theta)\right\},$$

per calcolare $\limsup F$ e $\liminf F$ dobbiamo trovare il massimo ed il minimo della funzione

$$\theta \longmapsto F(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

$$\partial_\theta \left[F(r\cos\theta, r\sin\theta) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \partial_\theta \left[\frac{\cos\theta \sin^2\theta}{\cos^2\theta + r^2 \sin^2\theta} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)\, \partial_\theta [\cos\theta \sin^2\theta] - \cos\theta\sin^2\theta \, \partial_\theta [\cos^2\theta + r^2 \sin^2\theta] = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)(2\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta) - \cos\theta\sin^2\theta \left(-2\sin\theta\cos\theta + 2r^2\sin\theta\cos\theta \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\cancel{\cos^2\theta\sin^3\theta} + 2\sin\theta\cos^4\theta + \cancel{2}\cos^2\theta\sin^3\theta + r^2\left(\cancel{2\sin^3\theta\cos^2\theta} - \sin^5\theta - 2\cancel{\sin^3\theta\cos^2\theta}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\theta \left(2\cos^4\theta + \cos^2\theta\sin^2\theta - r^2\sin^4\theta \right) = 0$$

Una soluzione è $\sin\theta = 0$. In questo caso $F = 0$.
Siccome $F > 0$ per $\theta \in (0, \frac{\pi}{4})$, abbiamo che questa soluzione non corrisponde ad un punto di MAX.
Cerchiamo quindi le soluzioni di

$$2\cos^4\theta + \cos^2\theta\sin^2\theta - r^2\sin^4\theta = 0$$

Poniamo $X = \cos^2\theta$.

Allora

$$2X^2 + X(1-X) - r^2(1-X)^2 = 0$$

$$\iff \quad X^2 + X - \tau^2 X^2 + 2\tau^2 X - \tau^2 = 0$$

$$\iff \quad (1-\tau^2)X^2 + (1+2\tau^2)X - \tau^2 = 0$$

$$X_{1,2} = \frac{-(1+2\tau^2) \pm \sqrt{(1+2\tau^2) + 4\tau^2(1-\tau^2)}}{2(1-\tau^2)}$$

$$= \frac{-(1+2\tau^2) \pm \sqrt{1+6\tau^2+o(\tau^2)}}{2(1-\tau^2)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(-(1+2\tau^2) \pm (1+6\tau^2)\right)(1+\tau^2) + o(\tau^2)$$

$$X_1 = \frac{1}{2} 4\tau^2(1+\tau^2) + o(\tau^2) = 2\tau^2 + o(\tau^2)$$

$$X_2 = \frac{1}{2}\left(-2-8\tau^2\right)(1+\tau^2) + o(\tau^2)$$

$$= -(1+4\tau^2)(1+\tau^2) + o(\tau^2)$$

$$= -1 - 5\tau^2 + o(\tau^2)$$

Siccome $X = \cos^2\theta > 0$, l'unica soluzione (per τ piccoli) è

$$X_1 = 2\tau^2 + o(\tau^2).$$

Quindi
$$\begin{cases} \cos^2\theta = 2\tau^2 + o(\tau^2) \\ \sin^2\theta = 1 - 2\tau^2 + o(\tau^2) \end{cases}$$

Calcoliamo

$$\sup_{\theta} F(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r\cos\theta\sin^2\theta}{\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}$$

$$= \frac{r\left(1-2r^2+o(r^2)\right)\sqrt{2r^2+o(r^2)}}{2r^2+o(r^2)+r^2\left(1-2r^2+o(r^2)\right)}$$

$$= \frac{r\left(1-2r^2+o(r^2)\right)\sqrt{2}\left(r+o(r)\right)}{3r^2+o(r^2)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3} + o(1).$$

Analogamente

$$\inf_{\theta} F(r\cos\theta, r\sin\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{3} + o(1).$$

Per studiare limsup G e liminf G, osserviamo che

$$G(x,y) = F(x,y) - \frac{x^2y^2}{x^2+(x^2+y^2)y^2}.$$

Siccome $|xy^2| \leq |x|\cdot\sqrt{x^2+y^2}\cdot|y|$

$$\leq |x|^2 + \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2|y|^2 = x^2+y^2(x^2+y^2),$$

abbiamo che

$$\frac{x^2y^2}{x^2+(x^2+y^2)y^2} \leq |x|\frac{|x|y^2}{x^2+(x^2+y^2)y^2} \leq |x|,$$

e di conseguenza

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+(x^2+y^2)y^2} = 0.$$

In conclusione

$$\begin{cases} \limsup G = \limsup F \\ \liminf G = \liminf F. \end{cases}$$

Es. 11: $F(x,y) = \dfrac{x^n y^{n+7}}{(x^2+y^2+y^4)^{2n}}$

① Siccome $\begin{cases} F(x,0) = 0 & ,\forall x \\ F(0,y) = 0 & ,\forall y \end{cases}$

abbiamo che F è derivabile in $(0,0)$ e

$$\partial_x F(0,0) = \partial_y F(0,0).$$

② Per studiare la continuità di F in $(0,0)$,

$$\frac{x^n y^{n+7}}{(x^2+y^2+y^4)^{2n}} = \frac{x^n y^{n+7}}{(x^2+y^2)^{2n}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{y^4}{x^2+y^2}\right)^{2n}}$$

Siccome

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\left(1+\frac{y^4}{x^2+y^2}\right)^{2n}} = 1,$$

abbiamo che F è continua in $(0,0)$

se e solo se lo è la funzione

$$G(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } (x,y) = (0,0); \\ \dfrac{x^n y^{n+7}}{(x^2+y^2)^{2n}}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0). \end{cases}$$

In coordinate polari

$$G(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^{2n+7}(\cos\theta)^n(\sin\theta)^{n+7}}{r^{4n}}$$

$$= r^{7-2n}(\cos\theta)^n(\sin\theta)^{n+7}.$$

Caso 1. Per $n = 1,2,3$, abbiamo che $7-2n > 0$ e quindi:

$$\limsup_{(x,y)\to(0,0)} G(x,y) = \lim_{r\to 0}\left\{ r^{7-2n} \cdot \sup_{\theta}\left\{(\cos\theta)^n(\sin\theta)^{n+7}\right\}\right\} = 0$$

Analogamente

$$\liminf_{(x,y)\to(0,0)} G(x,y) = 0$$

e quindi $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} G(x,y) = 0.$

Caso 2: $n \geq 4$. In questo caso $7-2n<0$.

$$\limsup_{(x,y)\to(0,0)} G(x,y) = \lim_{r\to 0} \left\{ r^{7-2n} \sup_{\theta} \left|(\cos\theta)^n (\sin\theta)^{n+7}\right| \right\}.$$

Siccome $(\cos\theta)^n(\sin\theta)^{n+7} > 0$ per $\theta \in (0,\frac{\pi}{2})$

abbiamo che

$$\sup_{\theta}\left\{(\cos\theta)^n(\sin\theta)^{n+7}\right\} > 0$$

e quindi $\displaystyle\limsup_{(x,y)\to(0,0)} G(x,y) = +\infty.$

In conclusione, G (e quindi F) è continua in $(0,0)$ $\Leftrightarrow$ $n = 1,2,3$.

---

③ F è differenziabile in $(0,0)$ se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{F(x,y) - F(0,0) - (x,y)\cdot DF(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Siccome $F(0,0) = \partial_x F(0,0) = \partial_y F(0,0) = 0$,

abbiamo che F è differenziabile in $(0,0)$

se e solo se $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{F(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$

Come nel punto precedente

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{F(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \iff \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{G(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Per studiare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{G(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

osserviamo che

$$\limsup_{(x,y)\to(0,0)} \frac{G(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \left\{ r^{6-2n} \sup_{\theta} \left\{ (\cos\theta)^n (\sin\theta)^{n+7} \right\} \right\}$$

$$\liminf_{(x,y)\to(0,0)} \frac{G(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \left\{ r^{6-2n} \inf_{\theta} \left\{ (\cos\theta)^n (\sin\theta)^{n+7} \right\} \right\}$$

Caso 1. $\underline{n = 1, 2}$. Allora $6-2n > 0$ e quindi

$$\limsup_{(x,y)\to(0,0)} \frac{G(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

$$\liminf_{(x,y)\to(0,0)} \frac{G(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

In questo caso $\lim \frac{G(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

e la funzione F è quindi differenziabile in $(0,0)$.

Caso 2. $n=3$. In questo caso $6-2n=0$ e

$$\limsup_{(x,y)\to(0,0)} \frac{G(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sup_\theta \{(\cos\theta)^n(\sin\theta)^{n+7}\}$$

$$\liminf_{(x,y)\to(0,0)} \frac{G(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \inf_\theta \{(\cos\theta)^n(\sin\theta)^{n+7}\}$$

Siccome la funzione

$$\theta \mapsto (\cos\theta)^n(\sin\theta)^{n+7}$$

non è costante, abbiamo che

$$\sup_\theta \{(\cos\theta)^n(\sin\theta)^{n+7}\} \neq \inf_\theta \{(\cos\theta)^n(\sin\theta)^{n+7}\}$$

Di conseguenza

$$\limsup \frac{G(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \neq \liminf \frac{G(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

e quindi F non è differenziabile in $(0,0)$.

Caso 3. $n \geq 4$. In questo caso $6-2n<0$.

Siccome $M = \sup_\theta \{(\cos\theta)^n(\sin\theta)^{n+7}\} > 0$, abbiamo

$$\limsup_{(x,y)\to(0,0)} \frac{G(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \left\{\frac{1}{r^{2n-6}} M\right\} = +\infty .$$

Quindi, la funzione F non è differenziabile in $(0,0)$.