Prova scritta – 20/4/2024

Non è consetito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. *Consideriamo gli insiemi*

(A) $\Omega_A = \Big(B_2(0,0) \setminus \overline{B}_1(0,0)\Big) \cap B_2(1,0)$; (D) $\Omega_D = \Big(\overline{B}_2(0,0) \setminus B_1(0,0)\Big) \cap B_2(1,0)$;

(B) $\Omega_B = \Big(B_2(0,0) \setminus \overline{B}_1(0,0)\Big) \cup B_2(1,0)$; (E) $\Omega_E = \Big(\overline{B}_2(0,0) \setminus B_1(0,0)\Big) \cup B_2(1,0)$;

(C) $\Omega_C = \Big(B_2(0,0) \setminus \overline{B}_1(0,0)\Big) \setminus B_2(1,0)$; (F) $\Omega_F = \Big(\overline{B}_2(0,0) \setminus B_1(0,0)\Big) \setminus B_2(1,0)$.

Gli insiemi seguenti sono **compatti :**

Gli insiemi seguenti sono **aperti :**

Gli insiemi seguenti non sono **né aperti, né compatti :**

Esercizio 2. *Trovare la frontiera dell'insieme*

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (1-x)^2 < y < 1-x\Big\}$$

$\partial D =$

Esercizio 3. *Sviluppare fino al secondo ordine in* $(0,0)$ *la funzione*

$$\frac{e^x(1-\sin(2y))}{\sqrt{\cos(x+y)}} =$$

Esercizio 4. *Siano* $\gamma(t) = \Big(\dfrac{e^{2t}}{1-\sin t} - 1\,,\ \ln(\cos(2t)+\sin(3t))\Big)$ *e* $F(x,y) = (1+\sin(2y))e^{3x-y}$.

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)) =$$

Esercizio 5. *Calcolare, al variare del parametro* $A \in \mathbb{R}$*, la matrice hessiana* H *della funzione* $F(x,y) = \dfrac{(Ax+\cos y)(1+x)}{1+\sin(xy)}$ *nel punto* $(0,0)$.

$H =$ *Per quali valori di* A *la matrice* H *è* **definita negativa***?*

Esercizio 6. *Sia* $\alpha = (2x - y^3)\,dx + (y^2 + x^3)\,dy$ *e sia* γ *la curva semplice chiusa e* C^1 *che parametrizza il bordo del dominio* $\Omega = B_{\sqrt{2}}(0,0)$ *in senso antiorario.*

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \alpha =$

Esercizio 7. *Consideriamo il campo* $F(x,y) = \Big(2x - xy^2 - x^3\,,\, y + yx^2 + y^3\Big)$.

Dato l'insieme $\Omega = B_1(0,0)$ *, calcolare* $\displaystyle\iint_\Omega \operatorname{div} F(x,y)\,dx\,dy =$

Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 8. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = x^3 - y^2x^2 - yx^4.$$

Trovare i punti critici di F *in* $\mathbb{R}^2$*. Studiando la matrice hessiana, dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.*

Esercizio 9. *Trovare l'estremo superiore della funzione*

$$F(x,y,z) = x\,,$$

sull'insieme

$$D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; (x+y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2 \le 2\Big\}.$$

Esercizio 10. *Data la funzione*

$$F(x,y) = \frac{xy\sqrt{x^2+y^2}}{4x^2 + y^2(x^2+y^2)} \quad ,$$

calcolare $\displaystyle\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$.

Esercizio 11. *Consideriamo la funzione*

$$F(0,0) = 0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{y^{n+7}x^{n+4}}{(x^2+y^2+xy^2)^{2n}} \quad se\ (x,y) \neq (0,0)\,.$$

Per quali valori del parametro intero $n \ge 1$ *la funzione* F *è differenziabile in* $(0,0)$ *?*
