
Prova scritta – 27/6/2023

Non è consentito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. Consideriamo gli insiemi

$$(A) \Omega_A = \overline{B}_1(0,0) \setminus B_1(1,0) ; \quad (D) \Omega_D = B_1(0,0) \setminus B_1(1,0) ;$$

$$(B) \Omega_B = \overline{B}_1(0,0) \cap B_1(1,0) ; \quad (E) \Omega_E = B_1(0,0) \setminus \overline{B}_1(1,0) ;$$

$$(C) \Omega_C = \overline{B}_1(0,0) \setminus \partial B_1(1,0) ; \quad (F) \Omega_F = \overline{B}_1(0,0) \cap \partial B_1(1,0) .$$

*Gli insiemi seguenti sono **compatti**:*

*Gli insiemi seguenti sono **aperti**:*

*Gli insiemi seguenti non sono **né aperti, né compatti**:*

Esercizio 2. Trovare la frontiera dell'insieme

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 2x \leq 2 \right\}$$

$$\partial D =$$

Esercizio 3. Sviluppare fino al secondo ordine in $(0,0)$ la funzione

$$\frac{\sqrt{1+xy}}{e^{\sin y}} =$$

Esercizio 4. Siano $\gamma(t) = (e^{3t} \cos(2t) - 1, e^{5t} \sin(2t))$ e $F(x, y) = \frac{e^{3x-y} - e^{x+y}}{\cos(x+y)}$.

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(\gamma(t)) =$$

Esercizio 5. Calcolare, al variare del parametro $A \in \mathbb{R}$, la matrice hessiana H della funzione $F(x, y) = \frac{e^{Ay} + \sin x}{1 - Ax}$ nel punto $(0, 0)$.

$H =$

Per quali valori di A la matrice H è indefinita?

Esercizio 6. Sia $\alpha = (x + y)^2 dx + (x + y) dy$ e sia γ la curva semplice chiusa e C^1 che parametrizza il bordo del dominio $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \leq 1\}$ in senso antiorario.

Calcolare l'integrale $\int_{\gamma} \alpha =$

Esercizio 7. Consideriamo il campo $F(x, y) = \left(\frac{x^3 + 3xy^2}{2 + x^2 + y^2}, \frac{5x}{4 + x^2 + y^2} \right)$.

Sulla palla B di centro $(0, 0)$ e raggio 2, calcolare $\iint_B \operatorname{div} F(x, y) dx dy =$

Esercizio 8. Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$F(x, y) = 0 \quad \text{se} \quad (x, y) = 0 \quad \text{e} \quad F(x, y) = \frac{(x + y)^{n+5} \sin(x^{n+4})}{(x^2 + y^2)^{2n}} \quad \text{se} \quad (x, y) \neq 0 .$$

Per quali valori di $n \geq 1$ la funzione F è differenziabile in $(0, 0)$?

Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 9. Consideriamo la funzione

$$F(x, y) = x^3 - y^3 + 3xy.$$

Trovare i punti critici di F in \mathbb{R}^2 , studiare la matrice hessiana e dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.

Esercizio 10. Dati la funzione

$$F(x, y, z) = x + 2y - z,$$

e l'insieme

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z - x - y)^2 \leq 2\},$$

mostrare che l'estremo superiore $\sup_D F$ è raggiunto e calcolarlo.

Esercizio 11. Data la funzione

$$F(x, y) = \frac{x \sin(xy)}{x^4 + y^2},$$

calcolare $\limsup_{(x,y) \rightarrow (0,0)} F(x, y)$.
