Prova scritta – 27/6/2023

Non è consentito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. *Consideriamo gli insiemi*

(A) $\Omega_A = \overline{B}_1(0,0) \setminus B_1(1,0)$; (D) $\Omega_D = B_1(0,0) \setminus B_1(1,0)$;

(B) $\Omega_B = \overline{B}_1(0,0) \cap B_1(1,0)$; (E) $\Omega_E = B_1(0,0) \setminus \overline{B}_1(1,0)$;

(C) $\Omega_C = \overline{B}_1(0,0) \setminus \partial B_1(1,0)$; (F) $\Omega_F = \overline{B}_1(0,0) \cap \partial B_1(1,0)$.

Gli insiemi seguenti sono **compatti:** A, F

Gli insiemi seguenti sono **aperti:** E

Gli insiemi seguenti non sono **né aperti, né compatti:** B, C, D

Esercizio 2. *Trovare la frontiera dell'insieme*

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 \le y \le 2x \le 2\Big\}$$

$\partial D = \{(x,x^2) : x \in [0,1]\} \cup \{(x,2x) : x \in [0,1]\} \cup \{(1,y) : y \in [1,2]\}$

Esercizio 3. *Sviluppare fino al secondo ordine in* $(0,0)$ *la funzione*

$$\frac{\sqrt{1+xy}}{e^{\sin y}} = 1 - y + \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}y^2 + o(x^2+y^2)$$

Esercizio 4. *Siano* $\gamma(t) = \Big(e^{3t}\cos(2t) - 1\,,\; e^{5t}\sin(2t)\Big)$ *e* $F(x,y) = \dfrac{e^{3x-y} - e^{x+y}}{\cos(x+y)}$.

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)) = \gamma'(0) \cdot \nabla F(\gamma(0)) = (3,2)\cdot(2,-2) = 2$$

Esercizio 5. *Calcolare, al variare del parametro* $A \in \mathbb{R}$, *la matrice hessiana* H *della funzione* $F(x,y) = \dfrac{e^{Ay} + \sin x}{1 - Ax}$ *nel punto* $(0,0)$.

$$H = \begin{pmatrix} 2A^2+2A & A^2 \\ A^2 & A^2 \end{pmatrix}$$

Per quali valori di A *la matrice* H *è* **indefinita***?* $A \in (-2, 0)$

Esercizio 6. *Sia* $\alpha = (x+y)^2\,dx + (x+y)\,dy$ *e sia* γ *la curva semplice chiusa e* C^1 *che parametrizza il bordo del dominio* $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 \le y \le x \le 1\right\}$ *in senso antiorario.*

Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_\gamma \alpha = \int_\Omega d\alpha = \int_0^1 dx \int_0^x (1-2x-2y)\,dy = -\frac{1}{2}$

Esercizio 7. *Consideriamo il campo* $F(x,y) = \left(\dfrac{x^3+3xy^2}{2+x^2+y^2}, \dfrac{5x}{4+x^2+y^2}\right)$.

Sulla palla B *di centro* $(0,0)$ *e raggio* 2, *calcolare* $\displaystyle\iint_B \operatorname{div} F(x,y)\,dx\,dy =$ 4π

Esercizio 8. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita come*

$$F(x,y) = 0 \quad se \quad (x,y) = 0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{(x+y)^{n+5}\sin(x^{n+4})}{(x^2+y^2)^{2n}} \quad se \quad (x,y) \neq 0\ .$$

Per quali valori di $n \ge 1$ *la funzione* F *è differenziabile in* $(0,0)$*?* $n = 1, 2, 3$

Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 9. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = x^3 - y^3 + 3xy.$$

Trovare i punti critici di F *in* $\mathbb{R}^2$, *studiare la matrice hessiana e dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.*

Esercizio 10. *Dati la funzione*

$$F(x,y,z) = x + 2y - z\,,$$

e l'insieme

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^2 + (z-x-y)^2 \le 2\right\},$$

mostrare che l'estremo superiore $\sup_D F$ *è raggiunto e calcolarlo.*

Esercizio 11. *Data la funzione*

$$F(x,y) = \frac{x\sin(xy)}{x^4+y^2}\,,$$

calcolare $\displaystyle\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$.

Es. 9

$$F(x,y) = x^3 - y^3 + 3xy.$$

$$\begin{cases} \partial_x F(x,y) = 3x^2 + 3y \\ \partial_y F(x,y) = -3y^2 + 3x \end{cases}$$

I punti critici sono le soluzioni (x,y) del sistema:

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \partial_x F(x,y) = 0 \\ \partial_y F(x,y) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 + y = 0 \\ -y^2 + x = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -x^2 \\ -x^4 + x = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Calcoliamo la matrice hessiana:

$$D^2F(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx}F & \partial_{xy}F \\ \partial_{yx}F & \partial_{yy}F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 3 \\ 3 & -6y \end{pmatrix}$$

In $(0,0)$, $D^2F(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = -9 < 0$$

Quindi, $D^2F(0,0)$ è indefinita e $(0,0)$ è un punto di sella.

In $(1,-1)$, $D^2F(1,-1) = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad \det = 27 > 0$, $\quad \mathrm{tr} = 12 > 0$

Quindi, $D^2F(1,-1)$ è definita positiva ed il punto $(1,-1)$ è un punto di minimo relativo.

Es. 10

e la funzione

$$F(x,y,z) = x + 2y - z\,,$$

$$D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^2 + (z - x - y)^2 \le 2 \right\},$$

(1) Dimostriamo che l'insieme D è un compatto. (vedi le soluzioni degli esercizi dell'appello precedente)

(2) Siccome D è un compatto ed F è una funzione continua, abbiamo che F ammette un massimo su D, ovvero $\sup_D F$ è raggiunto in un qualche punto di D.

(3) Osserviamo che $\nabla F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Quindi, la funzione F non ha punti critici in $\mathbb{R}^3$ e di conseguenza il massimo di F non è raggiunto nella parte interna di D.

Di conseguenza, $\sup_D F$ è raggiunto nel bordo

$$\partial D = \{(x,y,z) : x^2+y^2+(z-x-y)^2 = 2\}.$$

Per trovare il massimo di F su ∂D utilizzeremo i moltiplicatori di Lagrange e cerchiamo le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} 1 = \lambda 2x - \lambda 2(z-x-y) \\ 2 = \lambda 2y - \lambda 2(z-x-y) \\ -1 = \lambda 2(z-x-y) \\ x^2+y^2+(z-x-y)^2 = 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda(2x+y-z) \\ 2 = 2\lambda(2y+x-z) \\ -1 = 2\lambda(z-x-y) \\ 2 = x^2+y^2+(z-x-y)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x+\cancel{2y}-2z = \cancel{2y}+x-z \\ 2x+\cancel{y}-\cancel{z}+\cancel{z}-x-\cancel{y} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = z \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x = z = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2 = 2y^2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 1.$$

$\Rightarrow$ Le soluzioni sono :

$$(0,1,0) \quad e \quad (0,-1,0).$$

$$F(0,1,0) = 2 \quad e \quad F(0,-1,0) = -2.$$

Quindi $\sup_D F = 2.$

<u>Es. 11</u>

$$F(x,y) = \frac{x\sin(xy)}{x^4+y^2} \quad ,$$

Siccome $\sin(xy) = xy + o(x^2y^2)$

$$= xy + o(x^4+y^4),$$

abbiamo che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{x(\sin(xy) - xy)}{x^4+y^2} \right|$$

$$\leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{x(\sin(xy) - xy)}{x^4+y^4} \right| = 0$$

Di conseguenza,

$$\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = \limsup_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}.$$

Calcoliamo quindi:

$$\limsup_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

In coordinate polari

$$\frac{x^2y}{x^4+y^2} = \frac{r\cos^2\theta\sin\theta}{r^2\cos^4\theta+\sin^2\theta}$$

Fissato r, cerchiamo le soluzioni $(\text{in }\theta)$ di

$$\partial_\theta\left[\frac{r\cos^2\theta\sin\theta}{r^2\cos^4\theta+\sin^2\theta}\right]=0.$$

$$\iff \partial_\theta\left[\frac{\cos^2\theta\sin\theta}{r^2\cos^4\theta+\sin^2\theta}\right]=0$$

$$\iff \partial_\theta\left[\cos^2\theta\sin\theta\right]\left(r^2\cos^4\theta+\sin^2\theta\right) - \cos^2\theta\sin\theta\,\partial_\theta\left[r^2\cos^4\theta+\sin^2\theta\right]=0$$

$$\iff \left(\cos^3\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta\right)\left(\tau^2\cos^4\theta + \sin^2\theta\right)$$
$$- \cos^2\theta\sin\theta\left(-4\tau^2\cos^3\theta\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta\right) = 0$$

$$\iff \left(\cos^3\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta\right)\sin^2\theta - 2\cos^3\theta\sin^2\theta$$
$$+ \tau^2\left(\overset{2}{\cancel{4}}\cos^5\theta\sin^2\theta + \cos^7\theta \cancel{- 2\cos^5\theta\sin^2\theta}\right) = 0$$

$$\iff -\sin^2\theta\cos\theta\left(\cos^2\theta + 2\sin^2\theta\right)$$
$$+ \tau^2\cos^5\theta\left(2\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) = 0$$

$$\iff -\sin^2\theta\cos\theta + \tau^2\cos^5\theta = 0$$

$$\iff \cos\theta\left(\tau^2\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) = 0$$

<u>Caso 1:</u> $\cos\theta = 0 \Rightarrow \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} = 0$.

<u>Caso 2:</u> $\tau^2\cos^2\theta - \sin^2\theta = 0$

Siccome $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$,

abbiamo:
$$\begin{cases} \cos^2\theta = \dfrac{1}{1+\tau^2} \\[2ex] \sin^2\theta = \dfrac{\tau^2}{1+\tau^2} \end{cases}$$

Di conseguenza $\sin\theta = \pm \dfrac{\tau}{\sqrt{1+\tau^2}}$.

e quindi

$$\frac{x^2 y}{x^4+y^2} = \frac{\tau \cos^2\theta \sin\theta}{\tau^2 \cos^4\theta + \sin^2\theta}$$

$$= \frac{\tau \dfrac{1}{1+\tau^2}\left(\pm\dfrac{\tau}{\sqrt{1+\tau^2}}\right)}{\tau^2 \dfrac{1}{(1+\tau^2)^2} + \dfrac{\tau^2}{1+\tau^2}}.$$

Passando al limite per $\tau \to 0$,

ottenia mo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} = \lim_{\tau\to 0} \frac{\cancel{\tau^2}}{2\cancel{\tau^2}} = \frac{1}{2}.$$
