Prova scritta – 14/2/2023

Non è consetito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. *Consideriamo gli insiemi*

$$(A)\ \Omega_A = \Big([0,1)\times[0,1)\Big)\cap B_1(1,1)\ ; \qquad (D)\ \Omega_D = \Big([0,1)\times[0,1)\Big)\cap \overline{B}_1(1,1)\ ;$$

$$(B)\ \Omega_B = \Big([0,1)\times[0,1)\Big)\cup B_1(1,1)\ ; \qquad (E)\ \Omega_E = \Big([0,1)\times[0,1)\Big)\cup \overline{B}_1(1,1)\ ;$$

$$(C)\ \Omega_C = \Big([0,1)\times[0,1)\Big)\setminus B_1(1,1)\ ; \qquad (F)\ \Omega_F = \Big([0,1)\times[0,1)\Big)\setminus \overline{B}_1(1,1)\ .$$

Gli insiemi seguenti sono **compatti :**

Gli insiemi seguenti sono **aperti :**

Gli insiemi seguenti non sono **né aperti, né compatti :**

Esercizio 2. *Trovare la frontiera dell'insieme*

$$D = \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ xy>0\,,\quad 0<x^2+y^2<1\Big\}$$

$\partial D =$

Esercizio 3. *Sviluppare fino al secondo ordine in* $(0,0)$ *la funzione*

$$\frac{e^x+e^y-e^xe^y}{\sqrt{1+\sin(x+y)}} =$$

Esercizio 4. *Siano* $\gamma(t) = \Big(\sqrt{1+3t}\,\cos(2t)-1\,,\ \ln\big(1+2t+t^3\big)\Big)$ *e* $F(x,y) = \dfrac{1+x-y}{e^{3x-2y}}$.

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}F(\gamma(t)) =$$

Esercizio 5. *Calcolare, al variare del parametro* $A \in \mathbb{R}$, *la matrice hessiana* H *della funzione* $F(x,y) = \dfrac{(1+x-Ay)e^x}{\cos y}$ *in* $(0,0)$.

$H =$ *Per quali valori di* A *la matrice* H *è definita positiva?*

Esercizio 6. *Sia* $\alpha = (x^3 - y^2 x)\,dx + (3x - 2y)\,dy$ *e sia* γ *la curva semplice chiusa e* C^1 *che parametrizza il bordo del dominio* $\Omega = \big\{(x,y)\ :\ 0 \le y \le 1 - x^2\big\}$ *in senso antiorario.*

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \alpha =$

Esercizio 7. *Consideriamo il campo* $F(x,y) = \Big(\dfrac{x + x^3 + xy^2}{1 + x^2 + y^2}\,,\ \dfrac{y + x^2 y + y^3}{1 + x^2 + y^2}\Big)$.

Sulla palla $B = \big\{(x,y)\ :\ x^2 + y^2 \le 2\big\}$, *calcolare* $\displaystyle\iint_B \mathrm{div}F(x,y)\,dx\,dy =$

Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 8. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + xy - y^2.$$

Trovare i punti critici di F *in* $\mathbb{R}^2$ *e, studiando la matrice hessiana, dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.*

Esercizio 9. *Trovare l'estremo superiore della funzione*

$$F(x,y,z) = xy\,,$$

sull'insieme

$$D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x^2 + (y-z)^2 + (y-x)^2 \le 5\Big\}.$$

Esercizio 10. *Data la funzione*

$$F(x,y) = \frac{xy\sqrt{x^2+y^2}}{x^2 + x^2y^2 + y^4}\quad ,$$

calcolare $\displaystyle\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$.

Esercizio 11. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita come*

$$F(x,y) = 0 \quad se \quad x \le 0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{x^2 y^{n+3}(x+y)^{n+1}}{(x^2+y^2)^{2n}} \quad se \quad x > 0\ ,$$

dove $n \ge 1$ *è un numero intero. Per quali valori di* $n \ge 1$ *la funzione* F *è differenziabile in* $(0,0)$*?*
