Prova scritta – 14/2/2023

Non è consetito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. *Consideriamo gli insiemi*

$(A)\ \Omega_A = \Big([0,1)\times[0,1)\Big)\cap B_1(1,1)\ ;\quad (D)\ \Omega_D = \Big([0,1)\times[0,1)\Big)\cap \overline{B}_1(1,1)\ ;$

$(B)\ \Omega_B = \Big([0,1)\times[0,1)\Big)\cup B_1(1,1)\ ;\quad (E)\ \Omega_E = \Big([0,1)\times[0,1)\Big)\cup \overline{B}_1(1,1)\ ;$

$(C)\ \Omega_C = \Big([0,1)\times[0,1)\Big)\setminus B_1(1,1)\ ;\quad (F)\ \Omega_F = \Big([0,1)\times[0,1)\Big)\setminus \overline{B}_1(1,1)\ .$

Gli insiemi seguenti sono **compatti:** E

Gli insiemi seguenti sono **aperti:** A

Gli insiemi seguenti non sono **né aperti, né compatti:** B, C, D, F

Esercizio 2. *Trovare la frontiera dell'insieme*

$$D = \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ xy>0\,,\quad 0<x^2+y^2<1\Big\}$$

$\partial D = \{(x,0): -1\leq x\leq 1\}\cup\{(0,y): -1\leq y\leq 1\}\cup\left(\partial B_1\cap\{(x,y): xy>0\}\right)$

Esercizio 3. *Sviluppare fino al secondo ordine in* $(0,0)$ *la funzione*

$$\frac{e^x+e^y-e^xe^y}{\sqrt{1+\sin(x+y)}} = \frac{1-xy}{\sqrt{1+x+y}} + o(x^2+y^2) = 1-\frac{x}{2}-\frac{y}{2}+\frac{3}{8}x^2+\frac{3}{8}y^2-\frac{1}{4}xy+o(x^2+y^2)$$

Esercizio 4. *Siano* $\gamma(t) = \Big(\sqrt{1+3t}\,\cos(2t)-1\,,\ \ln\big(1+2t+t^3\big)\Big)$ *e* $F(x,y) = \dfrac{1+x-y}{e^{3x-2y}}$.

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}F(\gamma(t)) = \gamma'(0)\cdot DF(\gamma(0)) = \left(\frac{3}{2},2\right)\cdot(-2,1) = -1$$

Esercizio 5. *Calcolare, al variare del parametro* $A \in \mathbb{R}$, *la matrice hessiana* H *della funzione* $F(x,y) = \dfrac{(1+x-Ay)e^x}{\cos y}$ *in* $(0,0)$.

$H = \begin{pmatrix} 3 & -A \\ -A & 1 \end{pmatrix}$

Per quali valori di A *la matrice* H *è definita positiva?*

$A \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

Esercizio 6. *Sia* $\alpha = (x^3 - y^2 x)\,dx + (3x - 2y)\,dy$ *e sia* γ *la curva semplice chiusa e* C^1 *che parametrizza il bordo del dominio* $\Omega = \{(x,y)\ :\ 0 \le y \le 1 - x^2\}$ *in senso antiorario.*

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \alpha = \int_\Omega d\alpha = \int_{-1}^{1} dx \int_0^{1-x^2} (2xy + 3)\,dy = 4$

Esercizio 7. *Consideriamo il campo* $F(x,y) = \left(\dfrac{x + x^3 + xy^2}{1 + x^2 + y^2}, \dfrac{y + x^2 y + y^3}{1 + x^2 + y^2}\right)$.

Sulla palla $B = \{(x,y)\ :\ x^2 + y^2 \le 2\}$, *calcolare* $\displaystyle\iint_B \operatorname{div} F(x,y)\,dx\,dy =$ 4π

Parte 2. **Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.**

Esercizio 8. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + xy - y^2.$$

Trovare i punti critici di F *in* $\mathbb{R}^2$ *e, studiando la matrice hessiana, dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.*

Esercizio 9. *Trovare l'estremo superiore della funzione*

$$F(x,y,z) = xy\,,$$

sull'insieme

$$D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x^2 + (y-z)^2 + (y-x)^2 \le 5\Big\}.$$

Esercizio 10. *Data la funzione*

$$F(x,y) = \frac{xy\sqrt{x^2+y^2}}{x^2 + x^2y^2 + y^4}\quad,$$

calcolare $\displaystyle\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$.

Esercizio 11. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita come*

$$F(x,y) = 0 \quad se \quad x \le 0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{x^2 y^{n+3}(x+y)^{n+1}}{(x^2+y^2)^{2n}} \quad se \quad x > 0\,,$$

dove $n \ge 1$ *è un numero intero. Per quali valori di* $n \ge 1$ *la funzione* F *è differenziabile in* $(0,0)$*?*

Esercizio 8. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + xy - y^2.$$

Trovare i punti critici di F in $\mathbb{R}^2$ e, studiando la matrice hessiana, dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.

$$\begin{cases} \partial_x F = x^2 + y \\ \partial_y F = x - 2y \end{cases}$$

I punti critici di F sono le soluzioni del sistema $\begin{cases} \partial_x F = 0 \\ \partial_y F = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y = 0 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y^2 + y = 0 \\ x = 2y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y(4y+1) = 0 \\ x = 2y \end{cases}$$

Le soluzioni sono: $\begin{cases} (x,y) = (0,0) \\ (x,y) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) \end{cases}$

Calcoliamo la matrice hessiana di F.

$$D^2F = \begin{pmatrix} \partial_{xx}F & \partial_{xy}F \\ \partial_{yx}F & \partial_{yy}F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

① In $(0,0)$, abbiamo

$$D^2F(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -1 < 0$$

Quindi $D^2F(0,0)$ è indefinita e $(0,0)$ è un punto di sella.

② In $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ abbiamo

$$D^2F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} \det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1 > 0 \\ \operatorname{tr}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -3 < 0 \end{cases}$$

Quindi $D^2F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ è definita negativa e $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ è un punto di massimo relativo.

Esercizio 9. *Trovare l'estremo superiore della funzione*

$$F(x,y,z) = xy\,,$$

sull'insieme

$$D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + (y-z)^2 + (y-x)^2 \leq 5\Big\}.$$

F è una funzione continua e D è un compatto. Quindi, F ammette un massimo in D.

Osserviamo che $\quad \nabla F = \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$. Quindi

i punti critici di F nella parte interna $\mathrm{int}(D)$ sono della forma $(0,0,z)$ con $z \in (-\sqrt{5}, \sqrt{5})$.

Nei punti di questa forma, abbiamo:

$$F(0,0,z) = 0\,, \quad \forall z.$$

Cerchiamo ora i punti critici di F sul bordo di D. Osserviamo che

$$\partial D = \Big\{(x,y,z) \;:\; G(x,y,z) = 0\Big\},$$

dove abbiamo posto

$$G(x,y,z) = x^2 + (y-z)^2 + (y-x)^2 - 5.$$

Calcoliamo

$$\partial_x G = 4x - 2y$$

$$\partial_y G = 4y - 2x - 2z$$

$$\partial_z G = 2z - 2y$$

e consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \partial_x G = 0 \\ \partial_y G = 0 \\ \partial_z G = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - y = 0 \\ z - y = 0 \\ 2y - x - z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 2x \\ z = 2x \\ x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} .$$

Siccome $(0,0,0) \notin \partial D$, abbiamo che $\nabla G \neq 0$ sul bordo ∂D.

Possiamo quindi cercare i massimi ed i minimi di F su ∂D usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Studiamo quindi il sistema

$$\begin{cases} \partial_x F = \lambda \partial_x G \\ \partial_y F = \lambda \partial_y G \\ \partial_z F = \lambda \partial_z G \\ G = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 2\lambda(2x-y) \\ x = 2\lambda(2y-x-z) \\ 0 = 2\lambda(z-y) \\ x^2+(y-z)^2+(y-x)^2 = 5 \end{cases}$$

Se $\lambda = 0$, allora $x = y = 0$. Quindi, $z = \pm\sqrt{5}$.

In questo caso:

$$F(0,0,\sqrt{5}) = F(0,0,-\sqrt{5}) = 0.$$

Consideriamo il caso $\lambda \neq 0$. Osserviamo che necessariamente $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Infatti, se $x = 0$, allora $\begin{cases} 2y-z=0 \\ z-y=0 \end{cases} \Rightarrow y = z = 0 \to$ impossibile!

Se $y = 0$, allora $x = 0$ e $z = 0 \to$ impossibile!

Allora, abbiamo che $\lambda \neq 0$, $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

Inoltre, la terza equazione implica che $y = z$.

Quindi, abbiamo il sistema:

$$\begin{cases} y = 2\lambda(2y-x) \\ x = 2\lambda(y-x) \\ x^2+(y-x)^2 = 5 \end{cases}$$

Usando l'equazione $\dfrac{2y-x}{y} = 2\lambda = \dfrac{y-x}{x}$,

otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} x^2+y^2-3xy = 0 \\ 2x^2+y^2-2xy = 5 \end{cases}.$$

$$x^2 + xy = 5 \Rightarrow y = \frac{5-x^2}{x}$$

$$x^2 + \frac{(5-x^2)^2}{x^2} - 3(5-x^2) = 0$$

$$x^4 + (5-x^2)^2 - 3x^2(5-x^2) = 0$$

$$5x^4 - 25x^2 + 25 = 0$$

$$x^4 - 5x^2 + 5 = 0$$

$$x^2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2} \quad \text{oppure} \quad x^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

Quindi:

$$xy = \frac{5-\sqrt{5}}{2} \quad \text{oppure} \quad xy = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

$\Rightarrow \quad xy = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ è il massimo di F su D.

Esercizio 10. *Data la funzione*

$$F(x,y) = \frac{xy\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+x^2y^2+y^4} \quad ,$$

calcolare $\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$.

In coordinate polari, abbiamo

$$F(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^3\cos\theta\sin\theta}{r^2\cos^2\theta + r^4\sin^2\theta}$$

$$= \frac{r\cos\theta\sin\theta}{\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}$$

Fissato $r>0$, cerchiamo il massimo della funzione $\dfrac{r\cos\theta\sin\theta}{\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}$ per $\theta\in[0,2\pi]$.

Calcoliamo quindi la derivata in θ:

$$\partial_\theta\left[\frac{r\cos\theta\sin\theta}{\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}\right] = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad r\left(-\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)\left(\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta\right) - r\cos\theta\sin\theta\left(-2\sin\theta\cos\theta+2r^2\sin\theta\cos\theta\right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad r\cos^2\theta = r^3\sin^2\theta$$

$$\Longleftrightarrow \quad \cos^2\theta = r^2\sin^2\theta$$

$$\Longleftrightarrow \quad 1-\sin^2\theta = r^2\sin^2\theta$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sin^2\theta = \frac{1}{1+r^2}, \quad \cos^2\theta = \frac{r^2}{1+r^2}$$

Quindi il massimo della funzione a raggio r fissato è:

$$\max_\theta F(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r\cos\theta\sin\theta}{\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \frac{1}{2}.$$

Di conseguenza:

$$\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = \lim_{r\to 0}\left\{\sup_\theta F(r\cos\theta, r\sin\theta)\right\} = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 11. *Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come*

$$F(x,y) = 0 \quad se \quad x \le 0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{x^2 y^{n+3}(x+y)^{n+1}}{(x^2+y^2)^{2n}} \quad se \quad x > 0\,,$$

dove $n \ge 1$ è un numero intero. Per quali valori di $n \ge 1$ la funzione F è differenziabile in $(0,0)$?

Verifichiamo prima l'esistenza delle derivate parziali $\partial_x F$ e $\partial_y F$ in $(0,0)$. Per definizione, abbiamo:

$$\partial_x F(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{F(x,0)-F(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0$$

$$\partial_y F(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{F(0,y)-F(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0.$$

Quindi F è derivabile in $(0,0)$ e $DF(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Di conseguenza, F è differenziabile in $(0,0)$, se e solo se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{F(x,y)-F(0,0)-(x,y)\cdot DF(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{F(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Per calcolare questo limite scriviamo F in coordinate polari:

$$\frac{F(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{F(r\cos\theta, r\sin\theta)}{r}$$

$$= \frac{r^{2n+6}}{r^{4n+1}} \cos^2\theta (\sin\theta)^{n+3} (\cos\theta + \sin\theta)^{n+1}$$

$$= r^{5-2n}\, g(\theta),$$

dove $g(\theta) := \cos^2\theta(\sin\theta)^{n+3}(\cos\theta+\sin\theta)^{n+1}$.

Osserviamo che in $[0,2\pi]$ la funzione g è continua e quindi ammette un massimo ed un minimo. Poniamo:

$$m = \min_{\theta\in[0,2\pi]} g(\theta) \quad \text{e} \quad M = \max_{\theta\in[0,2\pi]} g(\theta).$$

Caso 1. $n = 1,2$.

Allora

$$\limsup_{(x,y)\to(0,0)} \frac{F(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0}\left\{\sup_{\theta} r^{5-2n} g(\theta)\right\}$$

$$= M \lim_{r\to 0} r^{5-2n} = 0.$$

$$\liminf_{(x,y)\to(0,0)} \frac{F(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0}\left\{\inf_{\theta} r^{5-2n} g(\theta)\right\}$$

$$= m \lim_{r\to 0} r^{5-2n} = 0$$

Quindi, per $n = 1,2$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{F(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \quad \text{e}$$

la funzione F è differenziabile in $(0,0)$.

Caso 2: $n \geq 3$.

$$\limsup_{(x,y)\to(0,0)} \frac{F(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \left\{ \sup_{\theta} r^{5-2n} g(\theta) \right\}$$

$$= M \lim_{r\to 0} r^{5-2n} = M \cdot (+\infty)$$

Siccome g assume valori positivi, abbiamo che $M > 0$.
Quindi, $\limsup \frac{F}{\sqrt{x^2+y^2}} = +\infty$ e di conseguenza

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{F(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \neq 0,$$

ovvero la funzione non è differenziabile in $(0,0)$ per $n \geq 3$.