
Prova scritta – 31/1/2023

Non è consentito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. Consideriamo gli insiemi

$$(A) \Omega_A = \overline{B}_1 \cap \{x + y \geq 1\}; \quad (D) \Omega_D = \overline{B}_1 \cup \{x + y > 1\};$$

$$(B) \Omega_B = \overline{B}_1 \setminus \{x + y > 1\}; \quad (E) \Omega_E = \overline{B}_1 \cap \{x + y > 1\};$$

$$(C) \Omega_C = \overline{B}_1 \setminus \{x + y \geq 1\}; \quad (F) \Omega_F = \overline{B}_1 \cup \{x + y \geq 1\}.$$

Gli insiemi seguenti sono **chiusi** :

Esercizio 2. Trovare la frontiera dell'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 3 - y^2\}$$

$$\partial D =$$

Esercizio 3. Sviluppare fino al secondo ordine in $(0, 0)$ la funzione

$$\frac{e^{x-y}}{\sqrt{\cos y}} =$$

Esercizio 4. Siano $\gamma(t) = \left(\sqrt{1-6t} \sin(3t), \frac{1+t+t^3}{(1+t)^2} - 1\right)$ e $F(x, y) = \frac{(1+x) \ln(1+y)}{1+7x^2-3xy}$.

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(\gamma(t)) =$$

Esercizio 5. Calcolare la matrice hessiana H della funzione $F(x, y) = \frac{\cos(x + 2y) + 3xy}{1 + y}$ in $(0, 0)$. Dire se H è definita positiva, semi-definita positiva, definita negativa, semi-definita negativa, indefinita.

$H =$

La matrice H è:

Esercizio 6. Sia $\alpha = (\sin x + yx^2) dx + (x - xy^2) dy$ e sia γ la curva semplice chiusa e C^1 che parametrizza il bordo del dominio $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 3\}$ in senso antiorario.

Calcolare $\int_{\gamma} \alpha =$

Esercizio 7. Consideriamo il campo $F(x, y) = \left(\frac{2x - y}{1 + x^2 + y^2}, \frac{x + 3y}{(1 + x^2 + y^2)^2} \right)$.

Sulla palla B_R di centro $(0, 0)$ e raggio $R = 1$, calcolare $\iint_{B_R} \operatorname{div} F(x, y) dx dy =$

Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 8. Consideriamo la funzione

$$F(x, y) = x^3 - xy^2 + y^2 - x.$$

Trovare i punti critici di F in \mathbb{R}^2 e, studiando la matrice hessiana, dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.

Esercizio 9. Trovare l'estremo superiore della funzione

$$F(x, y, z) = x + 2y + 3z^2,$$

sull'insieme

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 3z^2 + (y - x)^2 \leq 5 \right\}.$$

Esercizio 10. Data la funzione

$$F(x, y) = \frac{xy}{5x^2 + y^2 + xy^2},$$

calcolare $\limsup_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} F(x, y)$.

Esercizio 11. Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$F(0, 0) = 0 \quad e \quad F(x, y) = \frac{(x - y)^n xy^4}{(x^2 + y^2)^n} \quad \text{se } (x, y) \neq (0, 0),$$

dove $n \geq 1$ è un numero intero. Per quali valori di $n \geq 1$ la funzione F è differenziabile in $(0, 0)$?
