Prova scritta – 31/1/2023

Non è consetito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. *Consideriamo gli insiemi*

$$(A)\ \Omega_A = \Big((-1,1)\times(-1,1)\Big)\cap\Big([0,2]\times\{0\}\Big)\ ; \quad (D)\ \Omega_D = \Big((-1,1)\times(-1,1)\Big)\cup\Big([0,2]\times\{0\}\Big)\ ;$$

$$(B)\ \Omega_B = \Big((-1,1)\times(-1,1)\Big)\setminus\Big([0,2]\times\{0\}\Big)\ ; \quad (E)\ \Omega_E = \Big([-1,1]\times[-1,1]\Big)\cap\Big([0,2]\times\{0\}\Big)\ ;$$

$$(C)\ \Omega_C = \Big([-1,1]\times[-1,1]\Big)\setminus\Big([0,2]\times\{0\}\Big)\ ; \quad (F)\ \Omega_F = \Big([-1,1]\times[-1,1]\Big)\cup\Big([0,2]\times\{0\}\Big)\ .$$

Gli insiemi seguenti sono **compatti** *:*

Esercizio 2. *Trovare la frontiera dell'insieme*

$$D = \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ y>1\Big\}\cap\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x^2+y\le 2\Big\}$$

$\partial D =$

Esercizio 3. *Sviluppare fino al secondo ordine in* $(0,0)$ *la funzione*

$$\frac{e^x}{\sqrt{\cos(x+y)}} =$$

Esercizio 4. *Siano* $\gamma(t) = \left(\sqrt{1+2t}\,\sin(2t)\,,\ \dfrac{1+t+t^3}{(1-t)^2}-1\right)$ *e* $F(x,y) = \dfrac{\ln(1+2x+y)}{1+x^2-3xy}$.

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)) =$$

Esercizio 5. *Calcolare la matrice hessiana H della funzione* $F(x,y) = \dfrac{\cos(x-y)+2xy}{1-xy}$ *in* $(0,0)$. *Dire se H è definita positiva, semi-definita positiva, definita negativa, semi-definita negativa, indefinita.*

$H =$ *La matrice H è:*

Esercizio 6. *Sia* $\alpha = (\sin x - \frac{1}{3}y^3 + y)\,dx + (\frac{1}{3}x^3 - y^3)\,dy$ *e sia γ la curva semplice chiusa e C^1 che parametrizza il bordo del dominio* $\Omega = \big\{(x,y) \ : \ x^2+y^2 \le 3\big\}$ *in senso antiorario.*
Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \alpha =$

Esercizio 7. *Consideriamo il campo* $F(x,y) = \left(\dfrac{x+3y}{1+x^2+y^2}\,,\,\dfrac{2x-y}{(1+x^2+y^2)^2}\right)$.
Sulla palla B_R di centro $(0,0)$ e raggio $R=1$, calcolare $\displaystyle\iint_{B_R} \mathrm{div}F(x,y)\,dx\,dy =$

Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 8. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = xy^2 - x^3 + y^2 + x.$$

Trovare i punti critici di F in $\mathbb{R}^2$ e, studiando la matrice hessiana, dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.

Esercizio 9. *Trovare l'estremo superiore della funzione*

$$F(x,y,z) = x + 2y + z^2\,,$$

sull'insieme

$$D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+z^2+(y-x)^2 \le 5\Big\}.$$

Esercizio 10. *Data la funzione*

$$F(x,y) = \frac{xy}{x^2+3y^2+y^3}\quad,$$

calcolare $\displaystyle\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$.

Esercizio 11. *Consideriamo la funzione $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definita come*

$$F(0,0)=0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{(x-y)^n(x+y)^{2n}xy^2}{(x^2+y^2)^{2n}} \quad se\ (x,y)\neq(0,0),$$

dove $n\ge 1$ è un numero intero. Per quali valori di $n \ge 1$ la funzione F è differenziabile in $(0,0)$?
