Prova scritta – 31/1/2023

Non è consetito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. *Consideriamo gli insiemi*

~~(A)~~ $\Omega_A = \Big((-1,1)\times(-1,1)\Big)\cap\Big([0,2]\times\{0\}\Big)$; ~~(D)~~ $\Omega_D = \Big((-1,1)\times(-1,1)\Big)\cup\Big([0,2]\times\{0\}\Big)$;

~~(B)~~ $\Omega_B = \Big((-1,1)\times(-1,1)\Big)\setminus\Big([0,2]\times\{0\}\Big)$; (E) $\Omega_E = \Big([-1,1]\times[-1,1]\Big)\cap\Big([0,2]\times\{0\}\Big)$;

~~(C)~~ $\Omega_C = \Big([-1,1]\times[-1,1]\Big)\setminus\Big([0,2]\times\{0\}\Big)$; (F) $\Omega_F = \Big([-1,1]\times[-1,1]\Big)\cup\Big([0,2]\times\{0\}\Big)$.

Gli insiemi seguenti sono **compatti** *:* E, F

Esercizio 2. *Trovare la frontiera dell'insieme*

$$D = \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ y>1\Big\}\cap\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y\le 2\Big\}$$

$\partial D =$ $\{(x,1) : -1 \le x \le 1\} \cup \{(x, 2-x^2) : -1 \le x \le 1\}$

Esercizio 3. *Sviluppare fino al secondo ordine in* $(0,0)$ *la funzione*

$$\frac{e^x}{\sqrt{\cos(x+y)}} = 1 + x + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{2}xy + o(x^2+y^2)$$

Esercizio 4. *Siano* $\gamma(t) = \Big(\sqrt{1+2t}\,\sin(2t)\,,\ \dfrac{1+t+t^3}{(1-t)^2}-1\Big)$ *e* $F(x,y) = \dfrac{\ln(1+2x+y)}{1+x^2-3xy}$.

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}F(\gamma(t)) = \gamma'(0)\cdot\nabla F(\gamma(0)) = (2,3)\cdot(2,1) = 7$$

Esercizio 5. *Calcolare la matrice hessiana H della funzione* $F(x,y) = \dfrac{\cos(x-y)+2xy}{1-xy}$ *in* $(0,0)$. *Dire se H è definita positiva, semi-definita positiva, definita negativa, semi-definita negativa, indefinita.*

$H = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ *La matrice H è:* indefinita

---

Esercizio 6. *Sia* $\alpha = (\sin x - \frac{1}{3}y^3 + y)\,dx + (\frac{1}{3}x^3 - y^3)\,dy$ *e sia γ la curva semplice chiusa e C^1 che parametrizza il bordo del dominio* $\Omega = \{(x,y) \,:\, x^2+y^2 \leq 3\}$ *in senso antiorario.*

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \alpha = \int_\Omega d\alpha = \int_{B_{\sqrt{3}}} (x^2+y^2-1)\,dx\,dy = \frac{3}{2}\pi$

Esercizio 7. *Consideriamo il campo* $F(x,y) = \left(\dfrac{x+3y}{1+x^2+y^2}\,,\,\dfrac{2x-y}{(1+x^2+y^2)^2}\right)$.

Sulla palla B_R di centro $(0,0)$ e raggio $R=1$, calcolare $\displaystyle\iint_{B_R} \mathrm{div}F(x,y)\,dx\,dy = \frac{\pi}{4}$

Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 8. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = xy^2 - x^3 + y^2 + x.$$

Trovare i punti critici di F in $\mathbb{R}^2$ e, studiando la matrice hessiana, dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.

Esercizio 9. *Trovare l'estremo superiore della funzione*

$$F(x,y,z) = x + 2y + z^2\,,$$

sull'insieme

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + z^2 + (y-x)^2 \leq 5\right\}.$$

Esercizio 10. *Data la funzione*

$$F(x,y) = \frac{xy}{x^2+3y^2+y^3}\quad,$$

calcolare $\displaystyle\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$.

Esercizio 11. *Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come*

$$F(0,0) = 0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{(x-y)^n(x+y)^{2n}xy^2}{(x^2+y^2)^{2n}} \quad se\ (x,y) \neq (0,0),$$

dove $n \geq 1$ è un numero intero. Per quali valori di $n \geq 1$ la funzione F è differenziabile in $(0,0)$?

Es. 8: $F(x,y) = xy^2 - x^3 + y^2 + x.$

$$\begin{cases} \partial_x F = y^2 - 3x^2 + 1 \\ \partial_y F = 2xy + 2y \end{cases}$$

I punti critici di F sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \partial_x F(x,y) = 0 \\ \partial_y F(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y^2 - 3x^2 + 1 = 0 \\ 2xy + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y^2 - 3x^2 + 1 = 0 \\ 2y(x+1) = 0 \end{cases}$$

Caso 1: $y = 0 \Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

Caso 2: $x = -1 \Rightarrow y^2 - 2 = 0 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$

I punti critici sono:

$(-1, \sqrt{2})$, $(-1, -\sqrt{2})$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$.

Calcoliamo la matrice hessiana

$$D^2F(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx}F & \partial_{yx}F \\ \partial_{xy}F & \partial_{yy}F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6x & 2y \\ 2y & 2x+2 \end{pmatrix}$$

In $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ abbiamo:

$$D^2F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) = \begin{pmatrix} -6/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} + 2 \end{pmatrix}$$

Siccome $\det\left(D^2F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)\right) < 0$,

la matrice $D^2F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ è indefinita

e quindi $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ è un punto di sella.

In $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$, abbiamo

$$D^2F\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) = \begin{pmatrix} 6/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} + 2 \end{pmatrix}$$

Siccome $-\frac{2}{\sqrt{3}} + 2 > 0$, abbiamo che

$\det\left(D^2F\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)\right) > 0$ and $\operatorname{tr}\left(D^2F\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)\right) > 0$

e quindi $D^2F\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ è definita positiva

e $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ è un punto di minimo relativo.

In $(-1, \sqrt{2})$, abbiamo

$$D^2F(-1, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 6 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Siccome $\det\left(D^2F(-1, \sqrt{2})\right) < 0$,

la matrice $D^2F(-1, \sqrt{2})$ è indefinita e di conseguenza, $(-1, \sqrt{2})$ è un punto di sella.

In $(-1, -\sqrt{2})$, abbiamo

$$D^2F(-1, -\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 6 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Anche in questo caso

$$\det\left(D^2F(-1, -\sqrt{2})\right) < 0$$

e quindi il punto critico $(-1, -\sqrt{2})$ è un punto di sella.

Esercizio 9. *Trovare l'estremo superiore della funzione*

$$F(x, y, z) = x + 2y + z^2,$$

sull'insieme

$$D = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + z^2 + (y - x)^2 \leq 5\Big\}.$$

Siccome D è un compatto ed F è una funzione continua, abbiamo che F ammette un massimo su D. Calcoliamo il gradiente

$$\nabla F = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2z \end{pmatrix}.$$

Il gradiente non si annulla mai. Quindi il massimo di F non è raggiunto all'interno $\mathrm{int}(D)$.

Quindi il massimo di F è sul bordo ∂D.

Per il teorema di Lagrange, i candidati per punto di massimo sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x + 2\lambda(x-y) \\ 2 = 2\lambda(y-x) \\ 2z = 2\lambda z \\ x^2 + z^2 + (y-x)^2 = 5 \end{cases}$$

Siccome $z(1-\lambda)=0$, abbiamo due casi.

<u>Caso 1:</u> $z=0$.

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x + 2\lambda(x-y) \\ 1 = \lambda(y-x) \\ x^2+(y-x)^2 = 5 \end{cases}$$

La seconda equazione implica che $\lambda \neq 0$.

Quindi, dividendo per λ:

$$y-x = \frac{1}{\lambda} = 4x-2y,$$

ovvero $3y = 5x \Rightarrow y = \frac{5}{3}x$.

Quindi $x^2 + \left(\frac{2}{3}x\right)^2 = 5$

$$\frac{13}{9}x^2 = 5 \Rightarrow x^2 = \frac{45}{13}$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{45}{13}} = \pm 3\sqrt{\frac{5}{13}}$$

$$\Rightarrow y = \pm 5\sqrt{\frac{5}{13}}$$

$$F\left(3\sqrt{\frac{5}{13}}, 5\sqrt{\frac{5}{13}}, 0\right) = \sqrt{5}\cdot\sqrt{13}$$

$$F\left(-3\sqrt{\frac{5}{13}}, -5\sqrt{\frac{5}{13}}, 0\right) = -\sqrt{5}\cdot\sqrt{13}.$$

Caso 2: $\lambda = 1$

$$\begin{cases} 1 = 2x + 2(x-y) \\ 1 = y - x \\ x^2 + z^2 + (y-x)^2 = 5 \end{cases}$$

$$4x - 2y = y - x \Rightarrow 5x = 3y \Rightarrow y = \frac{5}{3}x$$

$$y - x = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{5}{2}.$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1 + z^2 = 5$$

$$\Rightarrow z^2 = \frac{20 - 9 - 4}{4} = \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow z = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$F\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2}\right) = F\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{\sqrt{7}}{2}\right) = \frac{13}{2} + \frac{7}{4} = \frac{33}{4}$$

$$\sqrt{65} \leq \frac{33}{4}$$

$$\Leftrightarrow 65 \leq \left(8 + \frac{1}{4}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 65 \leq 64 + 4 + \frac{1}{16}$$

Quindi, il minimo di F è $\frac{33}{4}$.

Esercizio 10. *Data la funzione*

$$F(x,y) = \frac{xy}{x^2+3y^2+y^3} \quad ,$$

calcolare $\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$.

Soluzione: Osserviamo che

$$F(x,y) = \frac{xy}{x^2+3y^2+y^3}$$

$$= \frac{xy}{x^2+3y^2} \cdot \frac{x^2+3y^2}{x^2+3y^2+y^3}$$

$$= \frac{xy}{x^2+3y^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{y^3}{x^2+3y^2}}$$

Siccome $y^3 \leq \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3$

e $x^2+3y^2 \geq x^2+y^2$,

abbiamo che

$$\left|\frac{y^3}{x^2+3y^2}\right| \leq \sqrt{x^2+y^2} = r$$

$$\left(\text{ovvero} \quad \frac{y^3}{x^2+3y^2} = O(r) \right)$$

Quindi

$$F(x,y) = \frac{xy}{x^2+3y^2} \cdot \frac{1}{1+O(r)}$$

Siccome

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{1+O(r)} = 0,$$

abbiamo che

$$\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = \limsup_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+3y^2}.$$

Calcoliamo il secondo limsup usando le coordinate polari:

$$\limsup_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+3y^2} = \lim_{r\to 0} \left\{ \sup_{\theta} \frac{\cos\theta \sin\theta}{\cos^2\theta + 3\sin^2\theta} \right\}$$

$$= \sup_{\theta} \frac{\cos\theta\sin\theta}{1+2\sin^2\theta}.$$

Cerchiamo quindi i punti di massimo della funzione $\dfrac{\cos\theta\sin\theta}{1+2\sin^2\theta}$.

Derivando in θ, abbiamo che i candidati sono le soluzioni di:

$$\partial_\theta\left[\cos\theta\sin\theta\right]\left(1+2\sin^2\theta\right)$$
$$-\cos\theta\sin\theta\,\partial_\theta\left[1+2\sin^2\theta\right]=0$$

$$\iff \left(-\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)\left(1+2\sin^2\theta\right)$$
$$-\sin\theta\cos\theta\cdot 4\sin\theta\cos\theta=0$$

$$\iff \left(-1+2\cos^2\theta\right)\left(1+2\sin^2\theta\right)$$
$$-4\sin^2\theta\cos^2\theta=0$$

$$\iff -1+2\underbrace{\cos^2\theta}_{1-\sin^2\theta}-2\sin^2\theta=0$$

$$\iff 1-4\sin^2\theta=0$$

$$\iff \sin^2\theta=\frac{1}{4},\quad \cos^2\theta=\frac{3}{4}.$$

Quindi, il massimo di $\dfrac{\cos\theta\sin\theta}{\cos^2\theta+3\sin^2\theta}$

è
$$\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{3/4+3/4}=\frac{\sqrt{3}}{2.3}=\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

In conclusione,

$$\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Esercizio 11. *Consideriamo la funzione* $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *definita come*

$$F(0,0)=0 \qquad e \qquad F(x,y)=\frac{(x-y)^n(x+y)^{2n}xy^2}{(x^2+y^2)^{2n}} \quad se\ (x,y)\neq(0,0),$$

dove $n\geq 1$ *è un numero intero. Per quali valori di* $n\geq 1$ *la funzione* F *è differenziabile in* $(0,0)$*?*

Soluzione: Siccome

$$\begin{cases} F(x,0)=0 & \text{per ogni } x \\ F(0,y)=0 & \text{per ogni } y \end{cases}$$

abbiamo che esistono le derivate parziali $\frac{\partial F}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)$

e $$DF(0,0)=\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(0,0) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi F è differenziabile in zero se e solo se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{F(x,y)-F(0,0)-(x,y)\cdot DF(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{F(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 .$$

In coordinate polari, abbiamo

$$\frac{F(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r^{3n+3}}{r^{4n+1}} (\cos\theta - \sin\theta)^n (\cos\theta + \sin\theta)^{2n} \cos\theta \sin^2\theta$$

Poniamo

$$g(\theta) = (\cos\theta - \sin\theta)^n (\cos\theta + \sin\theta)^{2n} \cos\theta \sin^2\theta .$$

Su $[0, 2\pi]$, la funzione g è una funzione continua (e quindi limitata) e non identicamente nulla. Infatti, g assume sia valori positivi che valori negativi.

Quindi,
$$\begin{cases} \sup_{\theta} g(\theta) = M_n > 0 \\ \inf_{\theta} g(\theta) = m_n < 0 \end{cases}$$

Quindi

$$\begin{cases} \sup\limits_{\theta} \dfrac{F(r\cos\theta, r\sin\theta)}{r} = r^{2-n} \cdot M_n \\ \inf\limits_{\theta} \dfrac{F(r\cos\theta, r\sin\theta)}{r} = r^{2-n}\, m_n \end{cases}$$

(1) Se $n = 1$, allora

$$\lim_{r\to 0} \left\{ \sup_{\theta} \frac{F(r\cos\theta, r\sin\theta)}{r} \right\} = \lim_{r\to 0} r M_1 = 0$$

$$\lim_{r\to 0} \left\{ \inf_{\theta} \frac{F(r\cos\theta, r\sin\theta)}{r} \right\} = \lim_{r\to 0} r m_1 = 0$$

Quindi per $n=1$, la funzione è differenziabile.

(2) Se $n=2$, allora

$$\lim_{r\to 0} \left\{ \sup_{\theta} \frac{F(r\cos\theta, r\sin\theta)}{r} \right\} = M_2 > 0$$

$$\lim_{r\to 0} \left\{ \inf_{\theta} \frac{F(r\cos\theta, r\sin\theta)}{r} \right\} = m_2 < 0.$$

Siccome $\lim\sup \neq \lim\inf$, il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{F(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$ non esiste e

quindi F non è differenziabile in $(0,0)$.

③ Se $n \geq 3$, allora

$$\lim_{r \to 0} \left\{ \sup_{\theta} \frac{F(r\cos\theta, r\sin\theta)}{r} \right\} = +\infty$$

$$\lim_{r \to 0} \left\{ \inf_{\theta} \frac{F(r\cos\theta, r\sin\theta)}{r} \right\} = -\infty .$$

Allora, il limite

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{F(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{non esiste}$$

e quindi, per $n \geq 3$, F non è diff. in $(0,0)$.

In conclusione, F è differenziabile in $(0,0)$ solo per $n=1$.