Prova scritta – 10/1/2023

Non è consetito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. *Consideriamo gli insiemi*

(A) $\Omega_A = B_3(0,0) \cap \Big([0,6) \times (-1,1)\Big)$; (D) $\Omega_D = B_3(0,0) \setminus \Big([0,6] \times [-1,1]\Big)$;

(B) $\Omega_B = B_3(0,0) \cup \Big([0,6) \times (-1,1)\Big)$; (E) $\Omega_E = B_3(0,0) \setminus \Big((0,6] \times [-1,1]\Big)$;

(C) $\Omega_C = B_3(0,0) \setminus \Big([0,6) \times (-1,1)\Big)$; (F) $\Omega_F = B_3(0,0) \setminus \Big([0,6) \times [-1,1]\Big)$.

Gli insiemi seguenti sono **aperti** *:* B, D, F

Esercizio 2. *Trovare la frontiera dell'insieme*

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 1\Big\} \cap B_{\sqrt{2}}(0,0)$$

$\partial D = \left\{ (1,y) : -1 \leq y \leq 1 \right\} \cup \left\{ (\sqrt{2}\cos\theta, \sqrt{2}\sin\theta) : -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\}$

Esercizio 3. *Sviluppare fino al secondo ordine in* $(0,0)$ *la funzione*

$\dfrac{e^y + \cos x}{1 + \sin y} =$ $2 - y + \frac{3}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2+y^2)$

Esercizio 4. *Siano* $\gamma(t) = \Big((1+2t)^2 \sin(2t)\,,\ e^{\sin t} - \cos(3t)\Big)$ *e* $F(x,y) = \dfrac{e^{2x} + e^y - e^{3x+y}}{1+y}$.

$\dfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)) =$ -3

Esercizio 5. *Calcolare la matrice hessiana H della funzione* $F(x,y) = \dfrac{e^{xy}(1-2y)}{1+\sin x}$ *in* $(0,0)$. *Dire se H è definita positiva, semi-definita positiva, definita negativa, semi-definita negativa, indefinita.*

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice H è: indefinita

Esercizio 6. *Sia* $\alpha = (x^3 - y^3 + x)\,dx + (2x^3 + 3xy^2 - y)\,dy$ *e sia γ la curva semplice chiusa e C^1 che parametrizza il bordo del dominio* $\Omega = \{(x,y)\ :\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ *in senso antiorario.*
Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \alpha =$ 3π

Esercizio 7. *Consideriamo il campo* $F(x,y) = \left((x-3y)\cos\left(\pi(x^2+y^2)\right),\ \dfrac{x+4y}{5-x^2-y^2}\right)$.

Sulla palla B_R di centro $(0,0)$ e raggio $R = \sqrt{3}$, calcolare $\displaystyle\iint_{B_R} \mathrm{div}F(x,y)\,dx\,dy =$ 3π

Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 8. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 - xy.$$

Trovare i punti critici di F in $\mathbb{R}^2$ e, studiando la matrice hessiana, dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.

Esercizio 9. *Trovare il massimo della funzione*

$$F(x,y,z) = x + y\,,$$

sull'insieme

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x^2 + (x-y)^2 + (x-z)^2 \leq 1\right\}.$$

Esercizio 10. *Data la funzione*

$$F(x,y) = \frac{x^2 y\sqrt{x^2+y^2}}{y^2 + (x^2+y^2)^3}\quad ,$$

calcolare $\displaystyle\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$.

Esercizio 11. *Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come*

$$F(0,0) = 0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{(x-y)^{n+1}x^{n+2}y^{n+1}}{(x^2+y^2)^{2n+1}} \quad se\ (x,y) \neq (0,0),$$

dove $n \geq 1$ è un numero intero.

(1) *Per quali valori del parametro $n \geq 1$ la funzione è derivabile in $(0,0)$.*

(2) *Per quali valori del parametro $n \geq 1$ la funzione F è continua in $(0,0)$.*

(3) *Per quali valori del parametro $n \geq 1$ la funzione F è differenziabile in $(0,0)$.*
