Prova scritta – 17/4/2023

Non è consetito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. *Consideriamo gli insiemi*

(A) $\Omega_A = B_1(0,0) \setminus \Big([0,2] \times \{0\}\Big)$; (D) $\Omega_D = \overline{B}_1(0,0) \setminus \Big([0,2] \times \{0\}\Big)$;

(B) $\Omega_B = B_1(0,0) \cup \Big([0,2] \times \{0\}\Big)$; (E) $\Omega_E = \overline{B}_1(0,0) \cup \Big([0,2] \times \{0\}\Big)$;

(C) $\Omega_C = B_1(0,0) \cap \Big([0,2] \times \{0\}\Big)$; (F) $\Omega_F = \overline{B}_1(0,0) \cap \Big([0,2] \times \{0\}\Big)$.

Gli insiemi seguenti sono **compatti :**

Gli insiemi seguenti sono **aperti :**

Gli insiemi seguenti non sono **né aperti, né compatti :**

Esercizio 2. *Trovare la frontiera dell'insieme*

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < y \leq x - x^4\Big\}$$

$\partial D =$

Esercizio 3. *Sviluppare fino al secondo ordine in* $(0,0)$ *la funzione*

$$\frac{e^{x+y}\cos(x+y)}{\sqrt{1+xy}} =$$

Esercizio 4. *Siano* $\gamma(t) = \Big(\big(1+\sin(3t)\big)^2 - (1+t^2)^3,\ \ln\big(1+\sin(2t)\big)\Big)$ *e* $F(x,y) = \dfrac{\sin(2x-y)}{\cos(x-2y)}$.

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)) =$$

Esercizio 5. *Calcolare, al variare del parametro* $A \in \mathbb{R}$, *la matrice hessiana* H *della funzione* $F(x,y) = \dfrac{(1+Ax)(1-Ay)}{\cos(x+y)}$ *in* $(0,0)$.

$H =$ *Per quali valori di* A *la matrice* H *è definita positiva?*

Esercizio 6. *Sia* $\alpha = (x^3+y^3)\,dx + (y^3-x^3)\,dy$ *e sia* γ *la curva semplice chiusa e* C^1 *che parametrizza il bordo del dominio* $\Omega = B_R(0,0)$ *in senso antiorario.*
Calcolare, in funzione del raggio $R > 0$, *l'integrale* $\displaystyle\int_\gamma \alpha =$

Esercizio 7. *Consideriamo il campo* $F(x,y) = \Big(\dfrac{2+x}{1+3(x^2+y^2)}\,,\,\dfrac{1+2y}{1+(x^2+y^2)^2}\Big)$.

Sulla palla $B = \big\{(x,y)\ :\ x^2+y^2 \le 3\big\}$, *calcolare* $\displaystyle\iint_B \mathrm{div}F(x,y)\,dx\,dy =$

Esercizio 8. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita come*

$$F(x,y) = 0 \quad se \quad (x,y) = 0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{x^{n+4}y^{2n+5}}{(x^2+y^2)^{2n+1}} \quad se \quad (x,y) \neq 0\ .$$

Per quali valori di $n \ge 1$ *la funzione* F *è differenziabile in* $(0,0)$*?*

Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 9. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = x^2y^2 + \frac{1}{3}y^3 - 4x^2.$$

Trovare i punti critici di F *in* $\mathbb{R}^2$, *studiare la matrice hessiana e dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.*

Esercizio 10. *Dati la funzione*

$$F(x,y,z) = xy\,,$$

e l'insieme

$$D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ 3x^2 + (y-x)^2 + (z-x)^2 \le 12\Big\}\,,$$

dire se l'estremo superiore $\sup_D F$ *è raggiunto (e spiegare perché) e calcolarlo.*

Esercizio 11. *Dato* $\alpha \in \mathbb{R}$, *consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = \frac{2xy\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)^\alpha}{x^2\sqrt{x^2+y^2}+y^2}\quad ,$$

calcolare, in funzione del parametro α, $\displaystyle\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$ *e* $\displaystyle\liminf_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$.
