

Integrazione di funzioni su curve

DEFINIZIONE

Siano Ω un aperto di \mathbb{R}^n , $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ una curva in Ω .

Se γ è di classe C^1 , allora definiamo l'integrale di F su γ come

$$\int_{\gamma} F := \int_a^b F(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt .$$

Se invece $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ è una curva C^1 a tratti, definiamo

$$\int_{\gamma} F := \sum_{j=0}^{m-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} F(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt ,$$

dove

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{m-1} < t_m = b$$

è una qualsiasi partizione dell'intervallo $[a, b]$ tale che

$$\gamma : [t_j, t_{j+1}] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

è di classe C^1 per ogni $j = 0, \dots, m-1$.

LINEARITÀ DELL'INTEGRALE

Siano:

- Ω un aperto di \mathbb{R}^n ;
- $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni continue su Ω ;
- α e β due numeri reali;
- $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ una curva C^1 a tratti.

Allora

$$\int_{\gamma} (\alpha F + \beta G) = \alpha \int_{\gamma} F + \beta \int_{\gamma} G.$$

INTEGRAZIONE DI UNA FUNZIONE SU CURVE CONCATENATE

Siano Ω un sottoinsieme di \mathbb{R}^n e $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Siano

$$\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \Omega \quad \text{e} \quad \gamma_2 : [b, c] \rightarrow \Omega$$

due curve C^1 a tratti tali che

$$\gamma_1(b) = \gamma_2(b).$$

Allora

$$\int_{\gamma_1 * \gamma_2} F = \int_{\gamma_1} F + \int_{\gamma_2} F ,$$

dove $\gamma_1 * \gamma_2$ è il concatenamento di γ_1 e γ_2 .

 INTEGRAZIONE SU CURVE OPPOSTE

Siano Ω un sottoinsieme di \mathbb{R}^n e $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Data una curva C^1 a tratti

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$$

consideriamo la sua inversa

$$\gamma_- : [b, a] \rightarrow \Omega, \quad \gamma_-(t) := \gamma(b + a - t).$$

Allora, ponendo $s := b + a - t$, si ha

$$\int_{\gamma_-} F = \int_a^b F(\gamma(b + a - t)) |\gamma'(b + a - t)| dt = \int_a^b F(\gamma(s)) |\gamma'(s)| ds = \int_{\gamma} F.$$

INTEGRAZIONE SU CURVE EQUIVALENTI

Sia Ω un sottoinsieme di \mathbb{R}^n e sia $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua.

Supponiamo che le curve

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega \quad \text{e} \quad \sigma : [A, B] \rightarrow \Omega$$

siano equivalenti e di classe C^1 . Sia

$$g : [a, b] \rightarrow [A, B]$$

la funzione di classe C^1 su $[a, b]$ tale che

$$g'(a) = A, \quad g'(b) = B, \quad g' > 0 \quad \text{su} \quad [a, b],$$

e tale che

$$\gamma(t) = \sigma(g(t)) \quad \text{per ogni} \quad t \in [a, b].$$

Allora

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F &= \int_a^b F(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt && \text{(per definizione)} \\ &= \int_a^b F(\sigma(g(t))) |\sigma'(g(t))| g'(t) dt && \text{(qui usiamo che } g' > 0) \\ &= \int_A^B F(\sigma(s)) |\sigma'(s)| ds && \text{(cambiamo variabile: } s = g(t), ds = g'(t) dt) \\ &= \int_{\sigma} F && \text{(per definizione).} \end{aligned}$$

 LUNGHEZZA DI UNA CURVA C^1 A TRATTI

Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva C^1 a tratti. Definiamo la lunghezza di γ come

$$\text{lunghezza}(\gamma) := \int_{\gamma} 1.$$

Dai risultati delle sezioni precedenti, abbiamo che:

- se γ è il concatenamento di due curve γ_1 e γ_2 , allora

$$\text{lunghezza}(\gamma) = \text{lunghezza}(\gamma_1) + \text{lunghezza}(\gamma_2).$$

- la curva inversa

$$\gamma_- : [b, a] \rightarrow \Omega, \quad \gamma_-(t) := \gamma(b + a - t),$$

ha la stessa lunghezza di γ :

$$\text{lunghezza}(\gamma_-) = \text{lunghezza}(\gamma);$$

- se $\sigma : [A, B] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una curva equivalente a γ , allora

$$\text{lunghezza}(\sigma) = \text{lunghezza}(\gamma).$$

 ESERCIZI

Esercizio 1. *Su ciascuna delle curve*

$$\begin{aligned}\gamma : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2, & \gamma(t) &= (\cos t, \sin t), \\ \gamma : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2, & \gamma(t) &= (2 \cos t, 2 \sin t),\end{aligned}$$

calcolare l'integrale $\int_{\gamma} F$, dove:

$$(1) F(x, y) = 1; \quad (2) F(x, y) = x^2; \quad (3) F(x, y) = xy; \quad (4) F(x, y) = ye^x.$$

Esercizio 2. *Calcolare la lunghezza della curva*

$$\gamma : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t, t).$$

Esercizio 3. *Calcolare la lunghezza della curva*

$$\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \gamma(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t),$$

in funzione del parametro $T > 0$. Calcolare il limite

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T |\gamma'(t)| dt.$$

Esercizio 4. *Data una funzione*

$$r : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

consideriamo la curva

$$\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \gamma(r) = (r(t) \cos t, r(t) \sin t).$$

Dimostrare che la lunghezza di γ è data da:

$$\int_0^T \sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2} dt.$$

Esercizio 5. *Sia γ una curva semplice, chiusa e C^1 a tratti che parametrizza il bordo del rettangolo $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Data la funzione $F(x, y) = x^2 + y^2$, calcolare l'integrale $\int_{\gamma} F$.*

Esercizio 6. *Sia γ una curva semplice, chiusa e C^1 a tratti che parametrizza il bordo del rettangolo $[0, 1] \times [0, 1]$. Data la funzione $F(x, y) = xy$, calcolare l'integrale $\int_{\gamma} F$.*

Esercizio 7. *Sia γ una curva semplice, chiusa e C^1 a tratti che parametrizza il bordo della circonferenza $\partial B_1(0, 1)$. Data la funzione $F(x, y) = y$, calcolare l'integrale $\int_{\gamma} F$.*

Esempio 8. *Consideriamo la successione di curve*

$$\gamma_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma_n(t) = (t, t^n).$$

Calcolare il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma_n} 1$.