Integrazione su superfici. Definizione ed esempi

Superfici parametriche

Definizione 1 (**Superfici parametriche**)**.** *Una superficie parametrica è una mappa*

$$\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^3,$$

dove Ω *è un sottoinsieme di* $\mathbb{R}^2$ *e*

$$\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^3$$

è una funzione continua su Ω*. una funzione di classe* C^1*. L'insieme*

$$S = \Big\{\big(x(s,t), y(s,t), z(s,t)\big) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (s,t) \in \Omega\Big\},$$

è detto **sostegno** *della superficie parametrica.*

Esempio 2 (Grafici)**.** *Data una funzione continua*

$$F : \Omega \to \mathbb{R},$$

la mappa

$$\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^3, \qquad \Phi(x,y) = (x, y, F(x,y)),$$

è una superficie parametrica. Il suo sostegno è il grafico della funzione $F : \Omega \to \mathbb{R}$*.*

Esempio 3 (La sfera)**.** *Data un raggio* $R > 0$*, consideriamo la superficie parametrica*

$$\Phi_R : \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big] \times \big[0, 2\pi\big] \to \mathbb{R}^3, \qquad \Phi(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} R\cos\theta\cos\phi \\ R\cos\theta\sin\phi \\ R\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Il suo sostegno è la sfera di raggio R *e centro* $(0,0,0)$ *in* $\mathbb{R}^3$

$$\partial B_R = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = R^2\Big\}.$$

Integrazione di funzioni su superfici parametriche

Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un insieme limitato e misurabile secondo Riemann. Sia

$$\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^3$$

una funzione continua e tale che

$$\Phi : \mathrm{int}(\Omega) \to \mathbb{R}$$

è una funzione di classe C^1 e tale che le derivate parziali

$$\partial_x \Phi : \mathrm{int}(\Omega) \to \mathbb{R}^3 \qquad \text{e} \qquad \partial_y \Phi : \mathrm{int}(\Omega) \to \mathbb{R}^3$$

siano funzioni limitate. Siano $\mathcal{S}$ il sostegno della superficie parametrica $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^3$ e

$$F : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$$

una funzione continua e limitata su $\mathcal{S}$. Allora, la funzione

$$F(\Phi)\,|\,\partial_x \Phi \wedge \partial_y \Phi| : \Omega \to \mathbb{R}$$

è continua e limitata su $\mathrm{int}(\Omega)$ e quindi integrabile su $\mathrm{int}(\Omega)$.

Definiamo l'integrale della funzione F sulla superficie parametrica $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^3$ come

$$\int_\Phi F = \iint_\Omega F\big(\Phi(x,y)\big)\,\big|\partial_x \Phi(x,y) \wedge \partial_y \Phi(x,y)\big|\,dx\,dy.$$

L'area della sfera in $\mathbb{R}^3$

Esempio 4. *Dato un raggio $R > 0$, consideriamo la superficie parametrica*

$$\Phi_R : \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big] \times \big[0, 2\pi\big] \to \mathbb{R}^3, \qquad \Phi(\theta,\phi) = \begin{pmatrix} R\cos\theta\cos\phi \\ R\cos\theta\sin\phi \\ R\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Calcolare l'area della superficie Φ_R.

Soluzione. Calcoliamo le derivate

$$\partial_\theta\Phi = \begin{pmatrix} -R\sin\theta\cos\phi \\ -R\sin\theta\sin\phi \\ R\cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \partial_\phi\Phi = \begin{pmatrix} -R\cos\theta\sin\phi \\ R\cos\theta\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix},$$

il prodotto vettoriale

$$\partial_\theta\Phi \wedge \partial_\phi\Phi = \begin{pmatrix} -R^2\cos^2\theta\cos\phi \\ -R^2\cos^2\theta\sin\phi \\ -R^2\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix} = R^2\cos\theta \begin{pmatrix} -\cos\theta\cos\phi \\ -\cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix},$$

e la sua norma

$$\big|\,\partial_\theta\Phi \wedge \partial_\phi\Phi\big| = R^2\cos\theta\ ,$$

dove possiamo osservare che siccome $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ si ha che $\cos\theta \geq 0$. Quindi,

$$\text{Area}(\Phi_R) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\pi} R^2\cos\theta\, d\phi\, d\theta = 2\pi R^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\, d\theta = 4\pi R^2.$$

□

Integrazione di una funzione sulla sfera

Consideriamo una funzione

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\ , \qquad F = F(x,y,z).$$

Dato un raggio $R > 0$, consideriamo la superficie parametrica

$$\Phi_R : \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big] \times \big[0, 2\pi\big] \to \mathbb{R}^3, \qquad \Phi(\theta,\phi) = \begin{pmatrix} R\cos\theta\cos\phi \\ R\cos\theta\sin\phi \\ R\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Allora, l'integrale della funzione F sulla sfera di raggio R (ovvero sulla superficie parametrica Φ_R) è dato da

$$\int_{\partial B_R} F = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\pi} F\big(R\cos\theta\cos\phi,\ R\cos\theta\sin\phi,\ R\sin\theta\big)\, R^2\cos\theta\, d\phi\, d\theta.$$