

## Formula di Stokes in $\mathbb{R}^2$

### INTEGRAZIONE DI 2-FORME IN $\mathbb{R}^2$

Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^2$  e sia  $\alpha$  una 2-forma su  $\Omega$

$$\alpha = F(x, y) dx \wedge dy.$$

Definiamo

$$\iint_{\Omega} \alpha := \iint_{\Omega} F(x, y) dx dy.$$

Osserviamo che con questa definizione si ha

$$\iint_{\Omega} F(x, y) dy \wedge dx = - \iint_{\Omega} F(x, y) dx \wedge dy .$$

### FORMULA DI STOKES IN DOMINI NORMALI

**Teorema 1** (Formula di Stokes in domini normali). *Siano*

$$u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad e \quad v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

due funzioni di classe  $C^1([a, b])$  e tali che

$$u(x) < v(x) \quad \text{per ogni } x \in (a, b),$$

e sia

$$\Omega = \left\{ (x, y) : x \in [a, b], u(x) \leq y \leq v(x) \right\}$$

il dominio normale determinato da  $u$  e  $v$ . Sia  $\alpha$  una 1-forma di classe  $C^1$  in  $\mathbb{R}^2$

$$\alpha = F(x, y) dx + G(x, y) dy.$$

Allora

$$\iint_{\Omega} d\alpha = \int_{\gamma} \alpha,$$

dove  $\gamma$  è una curva semplice chiusa che parametrizza il bordo  $\partial\Omega$  in senso antiorario.

*Proof.* Prima calcoliamo

$$d\alpha = dF \wedge dx + dG \wedge dy = \left( -\partial_y F(x, y) + \partial_x G(x, y) \right) dx \wedge dy$$

Ora, per definizione di integrale di una 2-forma

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} d\alpha &= \iint_{\Omega} \left( -\partial_y F(x, y) + \partial_x G(x, y) \right) dx \wedge dy \\ &= \iint_{\Omega} \left( -\partial_y F(x, y) + \partial_x G(x, y) \right) dx dy \\ &= \int_a^b \int_{u(x)}^{v(x)} \left( -\partial_y F(x, y) + \partial_x G(x, y) \right) dy dx \quad (\text{per il teorema di Fubini}) \end{aligned}$$

Ora, usando le formule di integrazione per parti, abbiamo che

$$\int_a^b \int_{u(x)}^{v(x)} \left( -\partial_y F(x, y) \right) dy dx = - \int_a^b \left( F(x, v(x)) - F(x, u(x)) \right) dx$$

e anche

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_{u(x)}^{v(x)} \partial_x G(x, y) dy dx &= \int_a^b u'(x) G(x, u(x)) dx - \int_a^b v'(x) G(x, v(x)) dx \\ &\quad + \int_{u(b)}^{v(b)} G(b, y) dy - \int_{u(a)}^{v(a)} G(a, y) dy. \end{aligned}$$

Infine, abbiamo

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} d\alpha &= \int_a^b \int_{u(x)}^{v(x)} \left( -\partial_y F(x, y) + \partial_x G(x, y) \right) dy dx \\ &= \int_a^b \left( -F(x, v(x)) - v'(x) G(x, v(x)) \right) dx \\ &\quad + \int_a^b \left( F(x, u(x)) + u'(x) F(x, u(x)) \right) dx \\ &\quad + \int_{u(b)}^{v(b)} G(b, y) dy - \int_{u(a)}^{v(a)} G(a, y) dy. \end{aligned}$$

Per concludere, osserviamo che la somma degli integrali a destra è esattamente  $\int_{\gamma} \alpha$ . □

**Teorema 2** (Formula di Stokes in domini regolari). *Sia  $\Omega$  un aperto limitato in  $\mathbb{R}^2$  con bordo  $\partial\Omega$  di classe  $C^1$ . Sia  $\alpha$  una 1-forma di classe  $C^1$  in  $\mathbb{R}^2$ ,  $\alpha = F(x, y) dx + G(x, y) dy$ . Allora*

$$\iint_{\Omega} d\alpha = \int_{(\partial\Omega)^+} \alpha .$$

**Osservazione 3.** *Siccome  $\Omega$  è di classe  $C^1$ , il suo bordo può essere parametrizzato da un numero finito di curve semplici chiuse  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  di classe  $C^1$ . Inoltre, possiamo supporre che tutte le curve  $\gamma_i$  sono orientate in senso antiorario. In particolare, per ogni 1-forma  $\alpha$ , possiamo definire l'integrale  $\int_{(\partial\Omega)^+} \alpha$  come*

$$\int_{(\partial\Omega)^+} \alpha := \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} \alpha .$$

## ESERCIZI

**Esercizio 4.** *Sia  $D$  il dominio*

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x \right\}$$

*e sia  $\gamma$  una curva semplice chiusa  $C^1$  a tratti che parametrizza il bordo di  $D$  in senso antiorario. Data la 1-forma*

$$\alpha = xy dx + x dy ,$$

*calcolare  $\int_{\gamma} \alpha$ .*

**Esercizio 5.** *Sia  $\alpha$  la 1-forma*

$$\alpha = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

*e sia  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  la curva*

$$\gamma(t) = (2 \cos t, 2 \sin t).$$

*Calcolare  $\int_{\gamma} \alpha$ .*

**Esercizio 6** (Appello giugno 2021). *Sia  $D$  il dominio*

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x \right\}$$

*e sia  $\gamma$  una curva semplice chiusa  $C^1$  a tratti che parametrizza il bordo di  $D$  in senso antiorario. Data la 1-forma*

$$\alpha = x^2 dx + y^2 dy ,$$

*calcolare  $\int_{\gamma} \alpha$ .*

**Esercizio 7** (Appello giugno 2021). Sia  $D$  il dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$$

e sia  $\gamma$  una curva semplice chiusa  $C^1$  a tratti che parametrizza il bordo di  $D$  in senso antiorario. Data la 1-forma

$$\alpha = x^2 dx + xy dy ,$$

calcolare  $\int_{\gamma} \alpha$ .

**Esercizio 8** (Appello giugno 2021). Sia  $D$  il dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}$$

e sia  $\gamma$  una curva semplice chiusa  $C^1$  a tratti che parametrizza il bordo di  $D$  in senso antiorario. Data la 1-forma

$$\alpha = x dx + xy dy ,$$

calcolare  $\int_{\gamma} \alpha$ .

**Esercizio 9** (Luglio 2020). Sia  $D$  il dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 2x^3 \leq y \leq 3x^2\}$$

e sia  $\gamma$  una curva semplice chiusa  $C^1$  a tratti che parametrizza il bordo di  $D$  in senso antiorario. Data la 1-forma

$$\alpha = (x \sin x - 2y) dx + (y - x) dy ,$$

calcolare l'integrale  $\int_{\gamma} \alpha$ .

**Esercizio 10** (Giugno 2020). Sia  $D$  il dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, 2x^2 \leq y \leq x^2 + 1\}$$

e sia  $\gamma$  una curva semplice chiusa  $C^1$  a tratti che parametrizza il bordo di  $D$  in senso antiorario. Data la 1-forma

$$\alpha = (x^2 - 2xy) dx + (y^3 + x) dy ,$$

calcolare l'integrale  $\int_{\gamma} \alpha$ .