

Forme esatte e forme chiuse

FORME CHIUSE - DEFINIZIONE

Definizione 1 (Forme chiuse). Diciamo che una k -forma α (di classe C^1) è **chiusa** se $d\alpha = 0$.

Osservazione 2 (1-forme chiuse in \mathbb{R}^2). Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^2 e sia α la 1-forma

$$\alpha = a(x, y) dx + b(x, y) dy.$$

Allora la forma α è chiusa se e solo se i coefficienti

$$a : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad e \quad b : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

soddisfano l'equazione

$$\partial_y a = \partial_x b \quad \text{in } \Omega.$$

Osservazione 3 (1-forme chiuse in \mathbb{R}^3). Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^3 e sia α la 1-forma

$$\alpha = a(x, y, z) dx + b(x, y, z) dy + c(x, y, z) dz.$$

Allora la forma α è chiusa se e solo se i coefficienti

$$a : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad b : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad c : \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

sono soluzioni del sistema

$$\partial_y a = \partial_x b, \quad \partial_z a = \partial_x c \quad e \quad \partial_z b = \partial_y c \quad \text{in } \Omega.$$

Osservazione 4 (2-forme chiuse in \mathbb{R}^3). Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^3 e sia α la 2-forma

$$\alpha = a(x, y, z) dy \wedge dz + b(x, y, z) dz \wedge dx + c(x, y, z) dx \wedge dy.$$

Allora la forma α è chiusa se e solo se i coefficienti

$$a : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad b : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad c : \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

sono soluzioni dell'equazione sistema

$$\partial_x a + \partial_y b + \partial_z c = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Osservazione 5. Siccome l'unica $(n+1)$ -forma in \mathbb{R}^n è quella nulla, abbiamo che le n -forme in \mathbb{R}^n (o definite su un qualsiasi aperto di \mathbb{R}^n) sono sempre chiuse.

FORME ESATTE - DEFINIZIONE

Definizione 6 (Forme esatte). Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n e sia $k \geq 1$. Diciamo che una k -forma α (di classe C^0 su Ω) è **esatta** se esiste una $(k-1)$ forma β (di classe C^1 su Ω) tale che $d\beta = \alpha$.

Osservazione 7 (1-forme esatte in \mathbb{R}^2). Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^2 e sia α la 1-forma (di classe C^0 su Ω)

$$\alpha = a(x, y) dx + b(x, y) dy.$$

Allora, la forma α è esatta se e solo se esiste una funzione

$$F : \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

di classe C^1 su Ω , tale che

$$\partial_x F = a \quad e \quad \partial_y F = b \quad \text{in } \Omega.$$

Osservazione 8 (1-forme esatte in \mathbb{R}^3). Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^3 e sia α la 1-forma (di classe C^0 su Ω)

$$\alpha = a(x, y, z) dx + b(x, y, z) dy + c(x, y, z) dz .$$

Allora, la forma α è esatta se e solo se esiste una funzione

$$F : \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

di classe C^1 su Ω , tale che

$$\partial_x F = a, \quad \partial_y F = b \quad e \quad \partial_z F = c \quad in \quad \Omega .$$

Osservazione 9 (2-forme esatte in \mathbb{R}^3). Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^3 e sia α la 2-forma (di classe C^0 su Ω)

$$\alpha = a(x, y, z) dy \wedge dz + b(x, y, z) dz \wedge dx + c(x, y, z) dx \wedge dy .$$

Allora, la forma α è esatta se e solo se esiste una 1-forma β (di classe C^1 su Ω)

$$\beta = A(x, y, z) dx + B(x, y, z) dy + C(x, y, z) dz ,$$

tale che

$$\partial_y C - \partial_z B = a, \quad \partial_z A - \partial_x C = b \quad e \quad \partial_x B - \partial_y A = c \quad in \quad \Omega .$$

I CAMPI VETTORIALI IN \mathbb{R}^3 COME 1-FORME

Sia Ω un aperto in \mathbb{R}^3 e sia $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (a(x, y, z), b(x, y, z), c(x, y, z))$$

di classe C^1 su Ω . Possiamo associare al campo F la seguente 1-forma differenziale su Ω

$$\alpha = a(x, y, z) dx + b(x, y, z) dy + c(x, y, z) dz .$$

Calcoliamo

$$d\alpha = (\partial_y c - \partial_z b) dy \wedge dz + (\partial_z a - \partial_x c) dz \wedge dx + (\partial_x b - \partial_y a) dx \wedge dy .$$

Definizione 10 (Rotore). Il campo

$$\text{rot } F = (\partial_y c - \partial_z b, \partial_z a - \partial_x c, \partial_x b - \partial_y a) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$$

è detto **rotore** di F e viene indicato anche con $\vec{\nabla} \wedge F$, $\vec{\nabla} \times F$, $\nabla \wedge F$, $\nabla \times F$.

Definizione 11 (Campi irrotazionali e campi conservativi). Sia Ω un aperto in \mathbb{R}^3 e sia $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 su Ω .

- se il campo vettoriale F ha rotore nullo, allora si dice che F è un **campo irrotazionale**;
- se il campo F è il gradiente di una funzione $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, allora si dice che F è un **campo conservativo**.

Si ha quindi che:

Osservazione: Dato un campo vettoriale

$$F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(x, y, z) = (a(x, y, z), b(x, y, z), c(x, y, z))$$

e la 1-forma associata

$$\alpha = a(x, y, z) dx + b(x, y, z) dy + c(x, y, z) dz ,$$

abbiamo che:

- F è un **campo irrotazionale** \Leftrightarrow **la 1-forma α è chiusa**;
- F è un **campo conservativo** \Leftrightarrow **la 1-forma α è esatta**.

 I CAMPI VETTORIALI IN \mathbb{R}^3 COME 2-FORME

Sia Ω un aperto in \mathbb{R}^3 e sia

$$F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(x, y, z) = (a(x, y, z), b(x, y, z), c(x, y, z))$$

un campo vettoriale di classe C^1 su Ω .

Al campo F , possiamo associare la 2-forma

$$\alpha = a(x, y, z) dy \wedge dz + b(x, y, z) dz \wedge dx + c(x, y, z) dy \wedge dx.$$

Allora, possiamo calcolare

$$d\alpha = (\partial_x a + \partial_y b + \partial_z c) dx \wedge dy \wedge dz.$$

Definizione 12 (Divergenza). *La funzione*

$$\operatorname{div} F = (\partial_x a + \partial_y b + \partial_z c) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

è detta **divergenza** di F e viene indicata anche con $\vec{\nabla} \cdot F$ e $\nabla \cdot F$.

Definizione 13 (Campi irrotazionali e campi conservativi). *Sia Ω un aperto in \mathbb{R}^3 e sia $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 su Ω .*

- se il campo vettoriale F ha divergenza nulla, allora si dice che F è un **campo solenoidale**;
- se il campo F è il rotore di un altro campo $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, allora si dice che F è un **campo rotore**.

Si ha quindi che:

Osservazione: Dato un campo vettoriale

$$F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(x, y, z) = (a(x, y, z), b(x, y, z), c(x, y, z))$$

e la 2-forma associata

$$\alpha = a(x, y, z) dy \wedge dz + b(x, y, z) dz \wedge dx + c(x, y, z) dy \wedge dx.$$

abbiamo che:

- F è un **campo solenoidale** \Leftrightarrow la 2-forma α è **chiusa**;
- F è un **campo rotore** \Leftrightarrow la 2-forma α è **esatta**.